# MAC5701 – TÓPICOS EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
# *PLANO DE ESTUDO*

DANIEL M. MARTIN

## 1. Introdução

Coloração de grafos é uma sub-área da teoria dos grafos bastante estudada no passado e que teve seu desenvolvimento impulsionado com o objetivo de se resolver a Conjectura das Quatro Cores. Os principais e mais antigos resultados conhecidos são puramente combinatórios e formam o que se chama coloração clássica de grafos. Com o advento do método probabilístico, criou-se uma nova maneira para se tentar resolver tais problemas.

Desenvolvido por Paul Erdős, o método probabilístico permite provar a existência de estruturas combinatórias com certas propriedades através da contrução de um espaço de probabilidades apropriado, e da demonstração de que um elemento escolhido aleatoriamente nesse espaço possui a propriedade desejada com probabilidade positiva.

Este plano de estudos tem como base os livros (*i*) *Graph Coloring and the Probabilistic Method*, de M. Molloy e B. Reed [1] e (*ii*) *The Probabilistic Method*, de N. Alon e J. Spencer [2].

## 2. Tópicos de pesquisa

Pretendemos estudar os seguintes capítulos de [1]:

Parte I

1 Alguns resultados e conjecturas clássicas em coloração.
2 Resultados básicos de probabilidades.

Parte II

3 O método do primeiro momento.
4 O Lema Local de Lovász.
5 O limitante de Chernoff.

Parte III

6 A conjectura de Hadwiger.
7 Um limitante para o número cromático total.
8 O número cromático forte (the strong chromatic number).

9 Um limitante melhor para o número cromático total.

Parte IV

10 A Desigualdade de Talagrand aplicada na coloração de grafos esparsos.

No presente momento já temos estudados alguns capítulos iniciais.

## 3. Tópicos específicos de pesquisa

Um conceito importante em que estamos interessados é o de coloração total. Uma $k$-coloração total de um grafo $G$ é uma atribuição de $k$ cores aos vértices e arestas de $G$ de tal forma que elementos adjacentes ou incidentes tenham cores diferentes. O número cromático total, denotado $\chi_T(G)$, é o menor $k$ tal que existe uma $k$-coloração total de $G$.

Se considerarmos um vértice de grau máximo em um grafo $G$ é fácil ver que $\chi_T(G) \geq \Delta + 1$. O principal problema em aberto com relação ao número cromático total é decidir se ele pode ser aproximado de uma unidade, como acontece com o índice cromático (Teorema de Vizing). Vizing (1968) e Behzad (1965) propuseram, independentemente, o que é, sem dúvida, a pergunta central a respeito de colorações totais:

**Conjectura da Coloração Total:** $\chi_T(G) \leq \Delta + 2$.

Muitos resultados relativamente recentes apontam na direção de que esta conjectura é verdadeira. Usando o Limitante de Chernoff e o Método do Primeiro Momento consegue-se mostrar que:

**Teorema:** *Para todo grafo $G$ com $n$ vértices, temos* $\chi_T(G) \leq \Delta + \lceil \log n \rceil + 3$.

O segundo teorema pode ser obtido usando-se o Lema Local de Lovász. Ele mostra um limitante superior que é de outra natureza:

**Teorema:** *Para todo grafo $G$ com grau máximo $\Delta$ suficientemente grande,* $\chi_T(G) \leq \Delta + 2\Delta^{3/4}$.

A seguir temos um outro resultado que é um refinamento substancial do teorema anterior:

**Teorema:** *Se $G$ tem grau máximo $\Delta$, então* $\chi_T(G) \leq \Delta + O(\log^{10} \Delta)$.

O próximo teorema, de Molloy e Reed [3], é definitivamente o mais forte indicador de que a Conjectura da Coloração total é válida. Sua prova envolve, entre outras coisas, uma decomposição estrutural de grafos engenhosa construída por aqueles autores.

**Teorema:** *Existe uma constante absoluta $C$ tal que para todo grafo $G$ com grau máximo $\Delta$, temos $\chi_T(G) \leq \Delta + C$.*

A monografia conterá algum destes resultados, mas certamente não todos.

Um segundo tópico de interesse concerne lista-colorações de grafos. Dada uma coleção $\mathcal{L} = \{L_{v_1}, L_{v_2}, \ldots, L_{v_n}\}$ de listas de cores, $v_i \in V(G)$, uma $\mathcal{L}$-coloração de vértices de $G$ é uma atribuição de cores aos vértices de $G$, onde cada vértice $v$ recebe uma cor que está em $L_v$ e vértices adjacentes recebem cores diferentes. O número lista-cromático $\chi_l(G)$ é o menor número $k$ tal que se a lista $L_v$ de cada um dos vértices $v \in V(G)$ possuir pelo menos $k$ elementos, então $G$ tem uma $\mathcal{L}$-coloração.

Lista-colorações de vértices são bem diferentes das colorações de vértices, isto é, o número lista-cromático de um grafo não possui relação com o número cromático. Para exemplificar tal afirmação temos o seguinte teorema:

**Teorema:** *Para todo inteiro $k > 0$ existe um grafo bipartido $G$ tal que $\chi_l(G) \geq k$.*

Dada uma coleção $\mathcal{L} = \{L_{e_1}, L_{e_2}, \ldots, L_{e_m}\}$ de listas de cores, $e_i \in E(G)$, definimos uma $\mathcal{L}$-coloração de arestas de $G$ como sendo uma atribuição de cores às arestas de $G$, onde cada aresta $e$ recebe uma cor que está em $L_e$ e arestas com uma ponta em comum recebem cores diferentes. O índice lista-cromático $\chi'_l(G)$ é o menor número $k$ tal que se a lista $L_e$ de cada uma das arestas $e \in E(G)$ possuir pelo menos $k$ elementos, então $G$ tem uma $\mathcal{L}$-coloração de arestas.

Ao contrário das lista-colorações de vértices, lista-colorações de arestas são muito relacionadas com coloração de arestas:

**Conjectura:** *Para todo grafo $G$, temos $\chi'_l(G) = \chi'(G)$.*

O teorema abaixo pode ser demonstrado utilizando-se um resultado sobre emparelhamentos estáveis.

**Teorema:** **(Galvin)** *Para todo grafo bipartido $G$, temos $\chi'_l(G) = \chi'(G)$.*

Desta parte também pretendemos colocar algo na monografia, porém, como aplicação de certas ferramentas probabilísticas. Existem alguns outros livros que podemos consultar durante os estudos. São eles *Combinatorial Problems and Exercises* [4], *Modern graph theory* [5] e *Graph theory* [6].

## Referências

[1] Michael Molloy and Bruce Reed, *Graph colouring and the probabilistic method*, Algorithms and Combinatorics, vol. 23, Springer-Verlag, Berlin, 2002. MR **2003c:**05001

[2] Noga Alon and Joel H. Spencer, *The probabilistic method*, second ed., Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience[John Wiley & Sons], New York, 2000, With an appendix on the life and work of Paul Erdős. MR **2003f:**60003

[3] Michael Molloy and Bruce Reed, *A bound on the total chromatic number*, Combinatorica, **18** (1998), no. 2, 241-280. MR **99j:**05074

[4] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, Budapest, Hungary. 1993.

[5] Béla Bollobás, *Modern graph theory*, Springer-Verlag, New York, 1998. MR **99h:**05001

[6] Reinhard Diestel, *Graph theory*, Springer-Verlag, New York, 1997, Translated from the 1996 German original. MR 1 448 665

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Rua do Matão 1010, 05508–090 São Paulo, SP

*E-mail address*: `dmartin@ime.usp.br`