O Método Probabilístico Aplicado à Coloração de Grafos

Daniel M. Martin

1. Introdução

Coloração de grafos foi um assunto muito estudado no século passado devido à vontade que se tinha, na época, de resolver a conjectura das 4 cores. Graças a isso, a área de coloração de grafos é muito vasta atualmente. Existem diversas questões de interesse muito estudadas que, na verdade, são variantes do problema clássico de colorir propriamente os vértices de um grafo. Uma idéia bem natural é tentar colorir as arestas sem que duas adjacentes tenham a mesma cor. Podemos também pensar em colorir vértices (ou arestas) restringindo o conjunto de cores permitidas em cada vértice (aresta). Essa variante encaixa-se no que chamamos de coloração restrita. Outra variante é colorir vértices e arestas sem que elementos adjacentes ou incidentes tenham a mesma cor. Essa variante chamamos de: o problema da coloração total.

Existem, ainda hoje, algumas conjecturas famosas que estão abertas. Nesta monografia pretendemos apresentar os resultados clássicos da área, com enfoque no problema da lista-coloração e da coloração total. Muitos desses resultados apontam na direção de que as conjecturas são verdadeiras. Nas demonstrações de alguns teoremas faremos uso do método probabilístico criado por P. Erdős. Um apanhado das técnicas probabilísticas utilizadas é feito na seção *Ferramentas probabilísticas*.

2. Definições básicas e notação

Um grafo é um par ordenado $G = (V, E)$, onde V é o conjunto dos vértices e $E \subseteq \binom{V}{2}$ é o conjunto das arestas. Se $e \in E$ é uma aresta e $u \in e$, dizemos que u incide em e ou, equivalentemente, e incide em u. Também dizemos que u é uma ponta de e. Se $u, v \in e$ dizemos que u e v são vértices adjacentes ou vizinhos. Denotamos uma aresta $e = \{u, v\}$ simplesmente escrevendo uv. Duas arestas e e f são adjacentes se possuem uma ponta em comum.

Denotamos por $\delta(v)$ o conjunto de arestas que incide em v, e por $d(v)$ a cardinalidadede desse conjunto, que chamamos grau de v. Escrevemos Δ para denotar o maior grau do grafo ($\Delta = \max_{v \in V} d(v)$), e δ para denotar o grau mínimo. Se $X \subseteq V$ é um subconjunto de vértices do grafo, denotamos por $\Gamma(X)$ o conjunto dos vértices adjacentes a algum vértice de X. Abusando da notação, escrevemos $\Gamma(v)$ para denotar o conjunto de vizinhos de v.

Um grafo $G' = (V', E')$ é subgrafo de um grafo $G = (V, E)$, escrevemos $G' \subseteq G$, se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Quando não houver ambiguidade vamos escrever os conjuntos/invariantes definidos acima sem mencionar a que grafo se refeferem, senão escrevemos $V(G)$ em vez de V, $E(G)$ em vez de E, e assim por diante: $\Delta(G)$, $\delta(G)$, $d_G(v)$, $\delta_G(v)$, $\Gamma_G(X)$, $\Gamma_G(v)$. Um subgrafo H de G é induzido por um conjunto de vértices X, escrevemos $H = G[X]$, se $V(H) = X$ e $E(H) = E(G) \cap \binom{X}{2}$. Um subgrafo H de G é gerado por um conjunto de arestas M, escrevemos $H = G[M]$, se

$$V(H) = \bigcup_{f \in M} f \quad \text{e} \quad E(H) = M.$$

O *grafo linha* de um grafo G, denotado por $L(G)$, é um grafo onde $V(L(G)) = E(G)$ e ligamos dois vértices $e, f \in V(L(G)) = E(G)$ com uma aresta se e e f são arestas adjacentes em G.

3. Resultados clássicos em coloração

Uma *coloração dos vértices* (ou, simplesmente, *coloração*) de um grafo G é uma atribuição de cores aos seus vértices (formalmente é uma função $\varphi\colon V(G) \longrightarrow C$, onde C é um conjunto de cores). Dizemos que uma colorão é *própria* se vértices adjacentes recebem cores diferentes. Uma *k-coloração* é uma coloração que usa até k cores (geralmente os inteiros de 1 até k). Um grafo G é *k-colorível* se admite uma k-coloração própria. O *número cromático* de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro k tal que G é k-colorível. Dizemos que um grafo G é *k-cromático* se $\chi(G) = k$.

Um limitante superior trivial para o número cromático de um grafo é $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Para provar isso, suponha que já colorimos vários vértices do grafo, e suponha que estamos tentando colorir um certo vértice v. Precisamos colocar uma cor em v que não entre em conflito com as cores dadas aos vizinhos de v (ignore os vizinhos que ainda não foram coloridos). Temos $\Delta+1$ cores possíveis para dar a v e no máximo Δ cores a evitar. Assim, podemos escolher uma cor para v que seja diferente das cores dadas aos seus vizinhos. Este procedimento pode ser repetido, até que todos os vértices do grafo estejam coloridos. Portanto temos que $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

O método para colorir grafos descrito no parágrafo anterior é chamado método da coloração gulosa. Chama-se assim pois, a cada passo, estamos preocupados apenas em colorir um vértice particular, e o modo como o fazemos não atrapalha na coloração dos próximos vértices.

O *número de coloração* de G é definido por $\hat{\delta}(G) + 1$, onde $\hat{\delta}(G)$ é o máximo dentre os graus mínimos de todos os subgrafos de G. O resultado do parágrafo anterior pode ser levemente melhorado pondo-se $\hat{\delta}+1$ em vez de $\Delta+1$. Considere uma ordenação $v_1, \ldots, v_n$ dos vértices de G de forma que v_i é o vértice de grau mínimo em $G[v_1, \ldots, v_i]$. Executando o método da coloração gulosa, seguindo esta dada ordem dos vértices, temos que apenas $\hat{\delta}+1$ cores são necessárias. Isso pode não fazer diferença quando G é um grafo regular, pois nesse caso $\hat{\delta}(G) = \Delta(G)$.

Lema 1: *Todo grafo 2-conexo G, com grau máximo pelo menos 3, que não é completo contém três vértices x, y, z com $xy, xz \in E(G)$, $yz \notin E(G)$, e $G - y - z$ é conexo.*

Prova: Seja u um vértice de grau máximo. Dois de seus vizinhos, digamos x e w, não estão ligados por uma aresta. Caso contrário, se todos os vizinhos de u estivessem ligados entre si, como u tem grau máximo, então G seria completo: absurdo. Se $G - x - w$ é conexo, então estamos feitos. Suponha então que $\{x, w\}$ seja um conjunto de corte. Tome $G' = G - x$. Claramente G' é conexo pois G é 2-conexo. Sejam $B_1, \ldots, B_k$ os blocos 2-conexos de G'. É óbvio que x têm (em G) pelo menos um vizinho em cada B_i. Sejam y e z dois vizinhos de x que estão em B_1 e B_2 respectivamente. Os vértices y e z não são adjacentes pois estão em blocos diferentes de G'. A remoção de y não desconecta B_1. A remoção de z não desconecta B_2. Como y e z são diferentes de w, $G'-y-z$ é conexo. Gostaríamos de afirmar que a remoção de ambos também não desconecta G, porém devemos ser cautelosos. A remoção de ambos poderia desconectar G se desconectasse x de $G' - y - z$, mas

x tem grau pelo menos 3 e portanto é verdade que $G - y - z$ é conexo como gostaríamos. $\square$

Corolário 2: *Seja G um grafo 2-conexo que tem grau máximo $\Delta \geq 3$ e que não é completo. Podemos ordenar os vértices de G em $v_1, \ldots, v_n$ tal que $v_1v_2 \notin E(G)$, $v_1v_n, v_2v_n \in E(G)$, e para todo j, $3 \leq j \leq n-1$, v_j tem no máximo $\Delta - 1$ vizinhos em $\{v_1, \ldots, v_{j-1}\}$.*

Prova: Tome x, y e z como no lema. Ponha $v_1 = y$, $v_2 = z$ e $v_n = x$. Pelo lema sabemos que $G - v_1 - v_2$ é conexo. Ordene os vértices de $G - v_1 - v_2$ da seguinte forma: no primeiro passo escolha um vértice u que seja adjacente a v_n e ponha $v_{n-1} = u$. No passo i, $1 < i < n-2$, escolha u que seja adjacente a alguém de $v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{n-i+1}$ e ponha $v_{n-i} = u$. É fácil ver que a ordem descrita acima possui as propriedades desejadas. $\square$

Teorema 3 (Brooks)**:** *Para todo grafo G, $\chi(G) \leq \Delta(G)$ a menos que alguma componente de G seja um clique com $\Delta + 1$ vértices ou $\Delta = 2$ e alguma componente de G é um circuito ímpar.*

Prova: É fácil verificar que o teorema vale se $\Delta = 2$. Um contra-exemplo minimal para o teorema deve ser 2-conexo pois, caso ele tenha um vértice de corte v, e C é uma componente de $G - v$, podemos colorir $G[V(C) \cup \{v\}]$ e $G - C$ separadamente e ajustar a cor de v para que seja a mesma nas duas partes.

Suponha então que G é um grafo 2-conexo com $\Delta \geq 3$ tal que nenhuma componente sua é um clique com $\Delta + 1$ vértices. Considere uma ordenação dos vértices de G como no corolário. Se aplicarmos o método da coloração gulosa seguindo esta ordem dos vértices, então podemos colorir v_1 e v_2 com a mesma cor. Para cada vértice v_i, $2 < i < n$, podemos colorí-lo usando apenas cores de 1 a Δ, pois temos no máximo $\Delta - 1$ cores a evitar. O vértice v_n tem Δ vizinhos já coloridos, mas v_1 e v_2 têm a mesma cor. Então podemos usar, também, somente cores de 1 a Δ para colorí-lo. $\square$

Uma *coloração das arestas* de um grafo G é uma atribuição de cores às suas arestas (formalmente é uma função $\varphi \colon E(G) \longrightarrow C$, onde C é um conjunto de cores). Dizemos que uma colorão de arestas é *própria* se arestas adjacentes recebem cores diferentes. O *índice cromático* de um grafo G, denotado por $\chi'(G)$, é o menor inteiro k tal que existe uma coloração própria das arestas de G usando k cores. Note que colorir as arestas de um grafo G é o mesmo que colorir os vértices do grafo linha $L(G)$. Se tentássemos colorir propriamente as arestas de um grafo G, perceberíamos que são necessárias pelo menos $\Delta(G)$

cores. Um limitante superior natural que poderíamos tomar para $\chi'(G)$ é $\Delta(L(G))+1 \leq 2\Delta(G)-1$. O teorema abaixo, noentanto, reduz bem o limitante, e mostra que $\chi'(G)$ é bem próximo de $\Delta(G)$, na verdade, ou é Δ ou $\Delta+1$.

Teorema 4 (Vizing)**:** *Para todo grafo G, $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.*

Prova: Vamos provar o teorema por indução no número de arestas. Se $\Delta(G-e) < \Delta(G)$ para alguma aresta e, então podemos colorir, por indução, as arestas de $G-e$ usando $\Delta(G)$ cores, e colorir a aresta e com uma cor nova. Se $\Delta(G-e) = \Delta(G)$ para toda aresta e então suponha, por hipótese de indução, que as arestas estão todas coloridas com $\Delta(G)+1$ cores, com exceção de uma aresta $e = xy_1$ que queremos colorir.

Dizemos que uma cor c está livre em um vértice v, se nenhuma aresta que incide em v foi colorida com a cor c. Observe que em cada vértice, pelo menos uma cor está livre. Seja s uma cor livre em x. O que vamos fazer é construir uma seqüência de vértices $y_1, y_2, \ldots, y_k$ adjacentes a x, e uma seqüência de cores $t_1, t_2, \ldots, t_k$ tais que a cor t_i está livre no vértice y_i, mas a aresta xy_{i+1} tem cor t_i. Suponha que já tenhamos os vértices $y_1, y_2, \ldots, y_j$ e as cores $t_1, t_2, \ldots, t_j$. No máximo uma aresta xy possui cor t_j. Se existe tal aresta, então tomamos $y_{j+1} = y$ e tomamos uma cor t_{j+1} que está livre em y_{i+1}.

Há dois motivos pelos quais somos obrigados a parar de construir essas seqüências:

> (1) Não existe aresta incidente a x com cor t_k. Nesse caso, colorimos cada aresta xy_i com cor t_i, para $i < k$. E agora, como t_k está livre tanto em x como em y_k, podemos colorir a aresta xy_k com cor t_k.
> (2) Existe algum índice $j < k$ tal que y_j possui cor t_k. Caso isso aconteça, pinte cada aresta xy_i com cor t_i, para $i < j$. Nesse ponto, a aresta sem cor é a aresta xy_j. Discutiremos este caso no próximo parágrafo.

Temos então uma seqüência $y_j, \ldots, y_k$ e cores $t_j, \ldots, t_k$, onde a cor t_i está livre em y_i e está sendo usada em y_{i+1}. Ademais, y_j não está colorido com nenhuma cor e t_k está livre em y_j e em y_k. Se s está livre em y_j ou em y_k, colorimos a aresta xy_j ou xy_k com a cor s e o teorema está provado. Senão, considere o subgrafo $H \subseteq G$ induzido pelas arestas de cor s e de cor t_k. Todos os vértices de H têm grau no máximo dois (pois incide, no máximo, numa aresta de cor s e numa de cor t_k). Então as componentes de H só podem ser circuitos ou caminhos. Mas x, y_j e y_k têm grau no máximo 1 em H, e portanto uma das duas alternativas abaixo ocorre:

(1) x e y_j estão em componentes diferentes de H. Nesse caso, troque a cor s pela cor t_k, nas arestas da componente de H que contém y_j. Assim s será uma cor livre em x e y_j, e portanto podemos atribuir cor s à aresta xy_j que faltava ser colorida.
(2) x e y_k estão em componentes diferentes de H. Nesse caso, continue a colorir as arestas xy_i com a cor t_i, $j \leq i < k$. Agora a aresta não colorida é a aresta xy_k. Troque a cor s pela cor t_k nas arestas da componente de H que contém y_k. Assim s será uma cor livre em x e y_k, e portanto podemos atribuir cor s à aresta xy_k que faltava ser colorida.

Deste modo, acabamos de pintar a única aresta não colorida em G. E portanto o teorema está provado. $\square$

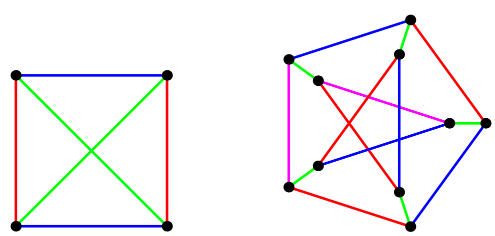
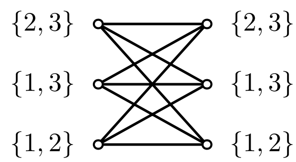


Fig. 1: Uma coloração das arestas do grafo da esquerda necessita apenas de Δ cores. Para colorir as arestas do grafo da direita, precisamos de $\Delta + 1$ cores.

Seja G um grafo. Agora vamos dar a cada vértice $v \in V(G)$ uma lista $\mathcal{L}(v)$ de cores permitidas. Dizemos que G é $\mathcal{L}$-colorível se existe uma coloração própria φ tal que $\varphi(v) \in \mathcal{L}(v)$, para todo vértice v. O número lista-cromático, denotado por $ch(G)$, é o menor inteiro k tal que, quaisquer que sejam as listas atribuidas aos vértices, se todas elas têm tamanho pelo menos k, então G é $\mathcal{L}$-colorível. É obvio que $ch(G)$ é pelo menos o número cromático. Mas não é obvio que ele pode ser, como de fato é, muito maior que o número cromático. Na verdade, isso é totalmente contra a nossa intuição. Se pensarmos que $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(v) = \{1, \ldots, \chi(G)\} \colon \forall v \in V(G)\}$ é um conjunto de listas "viável", então por que um outro conjunto de $\chi(G)$-listas, permitindo até mais cores do que simplesmente $\{1, \ldots, \chi(G)\}$, não seria "viável"? A construção de um contra-exemplo é razoavelmente simples:



Mais genericamente, podemos construir grafos bipartidos com número lista-cromático arbitrariamente alto. Seja G um grafo (A, B)-bipartido completo com $|A| = |B| = \binom{2k-1}{k}$. Ponha cada k-subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2k - 1\}$ como sendo a lista de algum $a \in A$ e de algum $b \in B$. Dessa forma, pelo menos k cores são usadas em qualquer coloração dos vértices de A e pelo menos k cores são usadas em qualquer coloração dos vértices de B. Uma cor aparece, então, em ambas as partes e portanto G não é $\mathcal{L}$-colorível. Embora o número lista-cromático não esteja relacionado com o número cromático (como acabamos de ver), o índice lista-cromático (definido analogamente) parece estar intimamente ligado com o índice cromático.

Conjectura 1 (Conjectura da Lista-Coloração)**:** *Para todo grafo G, é verdade que $ch(G) = \chi'(G)$.* $\square$

A conjectura é verdadeira para grafos bibartidos como mostra o Teorema de Galvin abaixo. Para apresentá-lo aqui, precisaremos da existência de emparelhamentos estáveis em grafos bipartidos. A prova do teorema de Galvin aqui apresentada foi encontrada em [**2**].

Seja G um grafo (A, B)-bipartido. Considere uma função preferência $\mu_v \colon \Gamma(v) \longrightarrow \mathbb{N}$ para cada vértice v do grafo. Suponha que μ_v é injetora para todo v. Se x, y são vizinhos de v e $\mu_v(x) > \mu_v(y)$, dizemos que v prefere x a y. Um emparelhamento M de G é estável se, para cada aresta $uv \in G - M$, temos $\mu_u(M(u)) > \mu_u(v)$ ou $\mu_v(M(v)) > \mu_v(u)$. Não é claro que para qualquer grafo bipartido existe um emparelhamento estável. O Teorema de Gale e Shapley mostra que sempre existe um tal emparelhamento.

Podemos pensar no grafo bipartido como se fosse um conjunto de rapazes e um conjunto de moças. Ligamos um rapaz a uma moça por uma aresta se esse rapaz conhece essa moça (suponha que a relação de conhecimento seja simétrica). As funções preferência de que falamos acima podem ser interpretadas como a ordem de preferência que cada rapaz tem pelas moças que conhece e cada moça tem pelos rapazes que conhece. O fato de que as funções preferência são injetoras evita que ocorram empates na comparação de duas pessoas conhecidas. A prova do Teorema de Gale e Shapley que vamos apresentar a seguir é, basicamente, a construção de um algoritmo que devolve um emparelhamento estável. O algoritmo segue as regras antigas da etiqueta: cada rapaz declara-se a moça de maior preferência e cada moça recusa todos os seus pretendentes exceto aquele que mais lhe agrada. Cada rapaz preterido torna a declarar-se a moça que segue na ordem de preferência até que, em algum momento, ou acha seu par ou fica solteiro de vez.

Teorema 5 (Gale, Shapley)**:** *Para toda atribuição de preferências em um grafo bipartido existe um emparelhamento estável.*

Prova: Seja G um grafo (A, B)-bipartido. Suponha que A seja o conjunto dos rapazes e B o conjunto das moças. Seja a^+ a moça preferida por $a \in A$ que ainda não o recusou. Seja b^+ o rapaz que mais agrada $b \in B$ e que já se declarou a b. Note que para qualquer vértice v, v^+ muda ao longo do algoritmo. No começo temos um emparelhamento inicial $M_0 = \emptyset$. Nas iterações ímpares i $(i = 1, 3, \dots)$, cada rapaz a declara-se à moça de maior preferência. Temos, então, um conjunto de arestas $F_i = \{aa^+ : a \in A\}$ associado às declarações. Observe que $M_{i-1} \subseteq F_i$. Nas iterações pares $i + 1$, cada moça b recusa todos os pretendentes exceto b^+. Temos então $M_{i+1} = \{bb^+ \in F_i : b \in B\}$. As arestas de F_i que não estão em M_{i+1} representam encontros "mal-sucedidos" (para os moços). Estas arestas não devem entrar novamente em nenhum F_j, $j > i$. De fato, isso não vai acontecer pois um rapaz recusado por uma moça jamais torna a declarar-se a ela (no nosso algoritmo). Cada rapaz declara-se a no máximo $|B|$ moças e portanto é recusado no máximo $|B|$ vezes. Temos então que o algoritmo termina após, no máximo, $2|A||B|$ iterações, quando $F_i = M_{i+1} = M$.

Para provar que o emparelhamento M devolvido pelo algoritmo é estável, tome uma aresta $ab \in V(G) - M$. Se $ab \notin M$, então a nunca declarou-se a b ou foi recusado por b. Se a nunca declarou-se a b é porque casou-se com c e $\mu_a(c) > \mu_a(b)$. Se a foi recusado por b é porque b casou-se com d e $\mu_b(d) > \mu_b(a)$. Portanto M é estável. □

Dado um grafo (A, B)-bipartido G e um conjunto de funções preferência $\{\mu_v : v \in V(G)\}$, chamamos $t_G(uv)$ à soma do número de vértices que u prefere a v com o número de vértices que v prefere a u. Note que a seguinte relação é verdadeira:

$$t_G(e) - t_{G-F}(e) = t_H(e) - t_{H-F}(e) \tag{1}$$

para todo $H \subseteq G$, para todo $F \subseteq E(H)$ e para toda aresta $e \in E(H) \setminus F$. Note também que, se M é um emparelhamento estável, então

$$t_G(e) - t_{G-M}(e) \geq 1 \tag{2}$$

para toda aresta $e \in E(G) \setminus M$.

Teorema 6: *Se G é um grafo bipartido e $\{\mu_v \colon v \in V(G)\}$ é um conjunto de funções preferência para os vértices de G, então $L(G)$ é $\mathcal{L}$-colorível se $|\mathcal{L}(e)| \geq t_G(e) + 1$ para toda aresta $e \in E(G)$.*

Prova: Vamos provar por indução no número de arestas do grafo. Se $E(G) = \emptyset$ então não há nada a fazer. Temos que provar que, para qualquer escolha das listas $\mathcal{L}(e)$, com $|\mathcal{L}(e)| \geq t_G(e) + 1$ para todo $e \in E(G)$, $L(G)$ é $\mathcal{L}$-colorível. Tome as listas $\mathcal{L}(e)$ com exatamente $t_G(e) + 1$ cores. Seja I o conjunto das arestas em cuja lista aparece uma certa cor i. Pelo Teorema de Gale e Shapley, o grafo $H := G[I]$ gerado pelas arestas em I tem um emparelhamento estável M. Tome $G' = G - M$. Vamos provar que G' tem uma $\mathcal{L}'$-coloração, onde $\mathcal{L}'(e) = \mathcal{L}(e) \setminus \{i\}$. Para isso, basta provar que $|L(e)| \geq t_{G'}(e) + 1$ para toda aresta $e \in E(G')$ e aplicar a hipótese de indução. Note que, se $e \notin I$, então $\mathcal{L}'(e) = \mathcal{L}(e) \geq t_G(e) + 1 \geq t_{G'}(e) + 1$. O caso relevante é, então, $e \in I - M$. Observe, por (1) e (2), que

$$t_G(e) - t_{G-M}(e) = t_H(e) - t_{H-M}(e) \geq 1$$

para toda aresta $e \in I - M$. Assim,

$$|\mathcal{L}'(e)| = |\mathcal{L}(e)| - 1 \geq t_G(e) \geq t_{G'}(e) + 1$$

para toda aresta $e \in I - M$. Por indução no número de arestas, $L(G')$ é $\mathcal{L}'$-colorível. Podemos completar uma tal coloração pondo cor i nas arestas de M. Desse modo temos que $L(G)$ é $\mathcal{L}$-colorível. $\square$

Teorema 7 (Galvin)**:** *Se G é um grafo (A, B)-bipartido, então $ch'(G) = \chi'(G)$.*

Prova: Fixe uma coloração φ de $L(G)$ com $\chi'(G)$ cores. Atribua preferências da seguinte maneira: um vértice $a \in A$ prefere um vizinho $b \in B$ a um vizinho $c \in B$ se $\varphi(ab) > \varphi(ac)$; um vértice $b \in B$ prefere um vizinho $a \in A$ a um vizinho $c \in A$ se $\varphi(ba) < \varphi(bc)$. Desse modo, a função $t_G(e) \leq \chi'(G) - 1$ para toda aresta $e \in E(G)$. Assim, para qualquer escolha das listas $\mathcal{L}(e)$ com $|\mathcal{L}(e)| \geq \chi(L(G))$, o teorema anterior garante que $L(G)$ é $\mathcal{L}$-colorível. $\square$

Um outro problema em coloração de grafos é o problema da coloração total. Uma coloração total de um grafo G é uma atribuição de cores aos seus vértices e arestas, de modo que elementos adjacentes ou incidentes tenham cores diferentes. Um limitante óbvio para o número cromático total (denotamos $\chi_T(G)$) é dado pelo algoritmo guloso de coloração de vértices e pelo teorema de Vizing: $2\Delta + 2$. Algumas seções adiante veremos limitantes bem melhores, mas que ainda ficam longe do valor conjecturado.

Conjectura 2: *Para todo grafo G, $\chi_T(G) \leq \Delta + 2$.* □

Note que se a Conjectura 1 for verdadeira, então esta conjectura é "quase" verdadeira: $\chi_T(G) \leq \Delta + 3$. Para ver isso pinte os vértices de um grafo usando $\Delta + 3$ cores. Para cada aresta teríamos uma lista de tamanho $\Delta + 3 - 2$ cores. Sob a hipótese de que Conjectura 1 é verdadeira, podemos colorir as arestas do grafo respeitando essas listas.

Recentemente B. Reed provou que é possível colorir qualquer grafo totalmente com apenas $\Delta + 500$ cores. Este é o resultado mais próximo da conjectura que temos até o presente momento.

4. Ferramentas Probabilísticas

Esta seção tem por única finalidade lembrar o leitor de algumas noções básicas de probabilidade e introduzir algumas ferramentas que serão usadas mais a diante. Nenhum resultado será demonstrado.

Um espaço de probabilidade é um par ordenado $(\Omega, \mathbf{Pr})$, onde Ω é um conjunto chamado *espaço amostral* e $\mathbf{Pr}\colon \Omega \longrightarrow [0,1]$ é uma função satisfazendo:

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{Pr}(\omega) = 1.$$

Nos exemplos desta monografia, vamos considerar somente a *distribuição uniforme* de probabilidades que significa $\mathbf{Pr}(\omega) = 1/|\Omega|$ para todo $\omega \in \Omega$. Um *evento* é um subconjunto $A \in \Omega$. Extendemos a função $\mathbf{Pr}$ para todo evento $A \subseteq \Omega$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{Pr}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{Pr}(\omega).$$

Uma propriedade que vamos usar muito é a cota da união:

$$\mathbf{Pr}\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathbf{Pr}(A_i).$$

Um evento A é *mutuamente independente* de um conjunto de outros eventos $\mathcal{E}$ se para todo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$, temos

$$\mathbf{Pr}\Big(A \cap \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B\Big) \Big/ \mathbf{Pr}\Big(\bigcap_{B \in \mathcal{F}} B\Big) = \mathbf{Pr}(A),$$

isto é, a probabilidade condicional de A dado que ocorreram todos os eventos em $\mathcal{F}$ é a mesma probabilidade de A.

Uma *variável aleatória* X sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbf{Pr})$ é uma função $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Seja Ω_X o conjunto de valores que a função X pode assumir. A variável aleatória X define um espaço de probabilidades $(\Omega_X, \mathbf{Pr}_X)$ onde, para cada $x \in \Omega_X$,

$$\mathbf{Pr}_X(x) = \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega)=x} \mathbf{Pr}(\omega).$$

A *esperança* da variável aleatória X, denotamos por $\mathbf{E}(X)$, é uma média ponderada dos valores assumidos por X:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{Pr}(\omega) X(\omega).$$

A propriedade da linearidade da esperança também será bastante empregada ao longo do nosso texto:

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{m} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{E}(X_i)$$

O princípio do primeiro momento resume-se no seguinte fato: se a média de n valores reais $v_1, \ldots, v_n$ é v, então existe um índice i tal que $v_i \geq v$. Equivalentemente, se $\mathbf{E}(X) \leq t$, então $\mathbf{Pr}(X \leq t) > 0$.

Se X é soma de n variáveis aleatórias $\{0, 1\}$, cada qual é 1 com probabilidade p e 0 com probabilidade $1 - p$, então dizemos que X possui distribuição binomial com parâmetros n e p. O limitante de Chernoff nos dá uma medida de quão concentrada X está de sua média $\mathbf{E}(X) = np$:

$$\mathbf{Pr}(|X - np| > t) < 2e^{-t^2/3np}.$$

Vamos nos referir genericamente a uma variável binomial com parâmetros n e p escrevendo $\mathbf{BIN}(n, p)$.

Uma outra ferramenta útil é o Lema Local de Lovász. Suponha que temos um conjunto $\mathcal{E}$ de eventos "ruins" que queremos evitar, e que cada evento $A \in \mathcal{E}$ é mutuamente independente de todos os outros eventos exceto um número limitado d deles. Se conseguirmos limitar a probabilidade dos eventos ruins, digamos $\mathbf{Pr}(A) \leq p$ para todo $A \in \mathcal{E}$, e se $4pd \leq 1$, então com probabilidade positiva nenhum dos eventos em $\mathcal{E}$ ocorre. Isto é, existe $\omega \in \Omega$ tal que

$$\omega \notin \bigcup_{A \in \mathcal{E}} A.$$

5. Número lista cromático

Já vimos que o número lista-cromático não está relacionado com o número cromático. A seguir, vamos apresentar um teorema de Alon que mostra que o número lista-cromático está relacionado com o número de coloraçao, isto é, se um deles cresce, então o outro também cresce, ainda que em "velocidades" diferentes. A demonstração apresentada aqui foi encontrada em [**1**] e difere ligeiramente da contida na bibiografia estudada [**3**]. Podemos concluir, pelo método da coloração gulosa, que $ch(G) \leq \hat{\delta} + 1$. Obviamente, todo grafo G possui um subgrafo H com grau médio d pelo menos $\hat{\delta}(G)$. Para um tal subgrafo, o Teorema de Alon afirma que

$$\hat{\delta}(G) \leq d \leq 4\binom{ch(H)^4}{ch(H)} \log 2\binom{ch(H)^4}{ch(H)}.$$

Como $ch(H) \leq ch(G)$, temos que

$$\hat{\delta}(G) \leq 4\binom{ch(G)^4}{ch(G)} \log 2\binom{ch(G)^4}{ch(G)}.$$

Fazendo as contas (que não vamos fazer), podemos obter que $ch(G) = \Omega(\log\hat{\delta}/\log\log\hat{\delta})$.

Lema 8: *Se G é um grafo simples com grau médio pelo menos d, então existe um subgrafo bipartido $H \subseteq G$ tal que $\delta(H) > d/4$.*

Prova: Primeiramente, podemos jogar fora os vértices de G que possuem grau menor ou igual a $d/2$. Note que, ao eliminarmos um vértice v desse tipo, o novo grau médio d' não diminui:

$$d' = \frac{\sum_{u\in V(G)} d(u) - 2d(v)}{n-1} = \frac{nd - 2d(v)}{n-1} \geq \frac{nd-d}{n-1} = d.$$

Chame G' ao grafo resultante. Agora tomamos $H \subseteq G'$ como sendo um subgrafo bipartido gerador com o maior número de arestas possível. O subgrafo H possui grau mínimo $\delta(H) \geq d/4$, caso contrário, seja $v \in H$ um vértice com grau menor que $d/4$ (em H). Como $v \in V(G')$ e $\delta(G') \geq d/2$, temos que passando v para a outra parte de H, aumentamos o número de arestas de H: absurdo. Assim, $H \subseteq G' \subseteq G$ é um subgrafo bipartido de G com grau mínimo pelo menos $d/4$. $\square$

Teorema 9 (Alon)**:** *Seja G um grafo simples com grau médio pelo menos d. Se s é um inteiro e*

$$d > 4\binom{s^4}{s} \log 2\binom{s^4}{s},$$

então $ch(G) > s$.

Prova: Seja $H \subseteq G$ um subgrafo (A,B)-bipartido com grau mínimo pelo menos $d/4$ como garante o lema. Suponha, sem perda de generalidade, que $|A| \geq |B|$. Vamos atribuir listas de cores $\mathcal{L}(v)$ a cada vértice $v \in V(H)$, cada uma delas com tamanho s. Se conseguirmos fazer isso de modo que H não seja $\mathcal{L}$-colorível, então teremos provado que $ch(H) > s$. Note que isso é suficiente para provar o teorema pois

$$ch(G) \geq ch(H) > s.$$

As cores serão tomadas do conjunto $\{1, 2, \ldots, s^4\}$. Primeiramente, vamos sortear uma s-lista $\mathcal{L}(b)$ uniformemente e independentemente para cada vértice $b \in B$. Chamamos um vértice $a \in A$ de *ruim*, se

$$\bigcup_{b \in \Gamma(a)} \{\mathcal{L}(b)\} = \binom{[s^4]}{s},$$

isto é, se cada um dos possíveis s-subconjuntos de $[s^4]$ aparecer como lista de algum vizinho de a. Seja X_a a variável aleatória

$$X_a = \begin{cases} 1 & \text{se } a \text{ é ruim,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja X a variável aleatória que representa o número de vértices ruins em A. Podemos estimar a probabilidade de $X_a = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}(X_a = 1) &= 1 - \mathbf{Pr}(X_a = 0) \\ &\geq 1 - \sum_{W \subseteq [s^4], |W| = s} \mathbf{Pr}(W \neq \mathcal{L}(b) \ \forall b \in \Gamma(a)) \\ &= 1 - \binom{s^4}{s} \left(1 - \binom{s^4}{s}^{-1}\right)^{d_H(a)} \end{aligned}$$

Vamos usar agora a desigualdade bem conhecida $(1-x) < e^{-x}$. Como $d_H(a) \geq d/4$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}(X_a = 1) &> 1 - \binom{s^4}{s} \exp\left\{ - \binom{s^4}{s}^{-1} \binom{s^4}{s} \log 2 \binom{s^4}{s} \right\} \\ &= 1 - 1/2 = 1/2. \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de um vértice $a \in A$ ser ruim é maior que $1/2$. Pela linearidade da esperança temos:

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\Big(\sum_{a \in A} X_a\Big) = \sum_{a \in A} \mathbf{E}(X_a) > |A|/2.$$

Então, a esperança de vértices ruins em A é maior que $|A|/2$. Pelo método do primeiro momento, podemos afirmar que existe uma atribuição de listas aos vértices em B tal que existem mais que $|A|/2$ vértices ruins em A. Fixe uma tal atribuição de listas e chame-a $\mathcal{L}_B$.

O que vamos fazer agora é achar uma atribuição de listas $\mathcal{L}_A$ para os vértices de A de forma que qualquer $\mathcal{L}$-coloração de H, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A \cup \mathcal{L}_B$, não é própria. Sorteie listas $\mathcal{L}(a)$ independentemente e uniformemente para os vértices de A, exatamente como fizemos para a parte B. Fixe uma $\mathcal{L}_B$-coloração φ_B dos vértices em B. Para cada vértice ruim $a \in A$, no máximo $s-1$ cores podem ser colocadas em a sem que entrem em conflito com as cores já postas nos vizinhos de a (por φ_B): se tomamos s cores quaisquer, digamos $c_1, \ldots, c_s$, então uma delas está sendo usada no vizinho b de a que possui lista de cores $\mathcal{L}_B(b) = \{c_1, \ldots, c_s\}$.

Assim, para que possamos $\mathcal{L}$-colorir H, é preciso que a lista de cada vértice ruim contenha pelo menos uma cor "compatível" com φ_B. Seja a variavel aleatória:

$$Y_a = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{L}(a) \text{ tem uma cor "compatível" com } \varphi_B, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Podemos limitar $\mathbf{Pr}(Y_a = 1)$ da seguinte forma:

$$\mathbf{Pr}(Y_a = 1) \leq \frac{(s-1)\binom{s^4-1}{s-1}}{\binom{s^4}{s}} = \frac{s(s-1)}{s^4} < 1/s^2.$$

Como temos $k > |A|/2$ vértices ruins em A, a probabilidade de que todos eles tenham uma cor "compatível" em suas listas é menor que

$$(1/s^2)^k < (1/s^2)^{|A|/2} = 1/s^{|A|} \leq 1/s^{|B|},$$

e portanto, a probabilidade de que possamos estender φ_B a uma $\mathcal{L}$-coloração de H e menor que $1/s^{|B|}$. Mas temos $s^{|B|}$ maneiras de escolher a $\mathcal{L}_B$-coloração φ_B. Assim, a probabilidade de que H seja $\mathcal{L}$-colorível é menor que

$$\frac{1}{s^{|B|}} s^{|B|} = 1.$$

Se a probabilidade de H ser $\mathcal{L}$-colorível é menor que 1, então existe um modo de escolher as listas para a parte A de modo que H não seja $\mathcal{L}$-colorível. Fixe um tal conjunto de listas e dê nome $\mathcal{L}_A$. Ponha $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A \cup \mathcal{L}_B$. Sabemos que H não é $\mathcal{L}$-colorível, portanto $ch(H) > s$ e o teorema está provado. $\square$

A conjectura a seguir é bem forte, e envolve apenas a estrutura de intersecção das listas associadas aos vértices, e não o tamanho das listas.

Conjectura 3: *Seja G um grafo e, para cada vértice $v \in V(G)$, seja $\mathcal{L}(v)$ uma lista com pelo menos ℓ cores disponíveis para v. Se para todo v, cada cor da lista $\mathcal{L}(v)$ está na lista de no máximo $\ell - 1$ vizinhos de v, então G é $\mathcal{L}$-colorível.* □

A seguir temos um teorema que é, no fundo, uma versão mais fraca da conjectura.

Teorema 10: *Seja G um grafo e, para cada vértice $v \in V(G)$, seja $\mathcal{L}(v)$ uma lista com pelo menos ℓ cores disponíveis para v. Se cada cor em $\mathcal{L}(v)$ aparece na lista de no máximo $\ell/8$ vizinhos de v, então G é $\mathcal{L}$-colorível.*

Prova: Podemos truncar as listas para que possuam todas tamanho ℓ. A seguir, sorteamos para cada vértice uma cor de sua lista. Suponha que a escolha é uniforme e independente para cada vértice do grafo. O que nos incomoda é se, por azar, sorteamos a mesma cor para as duas pontas de uma mesma aresta. Temos que evitar, então, todos os eventos ruins da forma $A_{e,i}$, que significam dar a cor i a ambas as pontas de e. A probabilidade de um tal evento é $p = 1/\ell^2$. Se $e = uv$, $A_{e,i}$ é dependente apenas dos eventos em $S_e = \{A_{f,j} \colon j \in \mathcal{L}(u), u \text{ é ponta de } f\} \cup \{A_{f,j} \colon j \in \mathcal{L}(v), v \text{ é ponta de } f\}$. Como $\mathcal{L}(u)$ tem apenas ℓ cores e cada uma dessas cores aparece em no máximo $\ell/8$ vizinhos, temos que $d = |S_e| \leq \ell^2/8 + \ell^2/8 = \ell^2/4$. Protanto, $4pd \leq 1$, e pelo Lema Local de Lovász, existe uma $\mathcal{L}$-coloração de G. □

6. Coloração total de grafos

A seguir vamos apresentar dois limitantes para o número cromático total. Todos os resultados foram retirados de [**3**].

Teorema 11: *Para todo grafo G, $\chi_T(G) \leq \Delta + \lceil \log n \rceil + 3$.*

Prova: Fixe uma $(\Delta + 1)$-coloração α das arestas, isto é, um conjunto de emparelhamentos disjuntos $\{M_1, M_2, \ldots, M_{\Delta+1}\}$ cobrindo as arestas do grafo como garante o Teorema de Vizing. Escolha uma $(\Delta + 1)$-coloração φ dos vértices como garante o Teorema de Brooks. Considere todas as $(\Delta + 1)$-colorações $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{(\Delta+1)!}$ que são obtidas de φ permutando-se as classes de coloração (os nomes das cores). Note que sempre podemos escolher a coloração φ de modo a usar todas as $(\Delta + 1)$ cores disponíveis. Isso evita que existam duas colorações φ_i e φ_j, $i < j$, que sejam idênticas.

Ao escolhermos uma coloração φ_i para os vértices, algumas arestas podem ficar conflitantes porque receberam a mesma cor que uma de suas pontas. Seja R_i o grafo de rejeição da coloração φ_i, isto é, o subgrafo de G gerado pelas arestas em $\{xy\colon xy \in M_j \text{ e } \varphi_i(x) = j \text{ ou } \varphi_i(y) = j\}$. Vamos provar que é possível escolhermos uma coloração φ_i de modo que o número máximo de arestas conflitantes incidentes a qualquer vértice seja no máximo $l = \lceil \log n \rceil + 1$. Ou seja, R_i tem grau máximo l. Se conseguirmos fazer isso, basta usarmos $l + 1$ novas cores para recolorir as arestas de R_i (Teorema de Vizing) e o grafo já estará totalmente $(\Delta + \lceil \log n \rceil + 3)$-colorido.

Sorteie uma coloração $\psi = \varphi_i$ uniformemente dentre as $(\Delta + 1)!$ colorações acima consideradas. Note que apenas uma aresta em $\delta(v)$ pode ser conflitante porque recebeu a mesma cor que v. Todas as demais arestas conflitantes em $\delta(v)$ são assim porque receberam a mesma cor que suas respectivas outras pontas. Considere o seguinte evento X_v: existem l arestas em $\delta(v)$ que conflitam com suas respectivas outras pontas. Nossa estratégia será limitar a probabilidade desse evento e aplicar a Desigualdade de Markov.

A probabilidade de que todas as arestas em $\{vu_1, vu_2, \ldots, vu_l\}$ sejam conflitantes (não por causa de v) é zero se dois desses vértices possuem a mesma cor por φ. Senão, $(\Delta - l + 1)!/(\Delta + 1)!$ é a probabilidade. Pela cota da união, podemos limitar a probabilidade de algum l-subconjunto de $\delta(v)$ ser um conjunto de arestas todas conflitantes com as respectivas outras pontas:

$$\binom{\Delta}{l} \frac{(\Delta - l + 1)!}{(\Delta + 1)!} < \frac{1}{l!}.$$

Mas $l! = (\lceil \log n \rceil + 1)!$ é maior que n se $n \geq 3$. Para ver isso basta uma aplicação simples do fato que $\log n! = O(n \log n)$. Então a probabilidade de que algum l-subconjunto de $\delta(v)$ seja um conjunto de arestas todas conflitantes é menor que $1/n$. Pela linearidade da esperança e pela Desigualdade de Markov, a probabilidade de que para nenhum vértice v do grafo, algum l-subconjunto de $\delta(v)$ seja um conjunto de arestas todas conflitantes, é maior que zero. Assim existe uma coloração φ_j tal que $\delta(R_j) \leq l$. Usando apenas $l + 1$ novas cores podemos colorir totalmente o grafo G, e portanto, $\chi_T(G) \leq \Delta + \lceil \log n \rceil + 3$. $\square$

Teorema 12: *Para todo grafo G com Δ suficientemente grande, temos $\chi_T(G) \leq \Delta + 2\Delta^{\frac{3}{4}}$.*

Prova: Fixamos, inicialmente, uma $(\Delta + 1)$-coloração α das arestas, isto é, um conjunto de emparelhamentos disjuntos $M_0, \ldots, M_\Delta$ cobrindo todas as arestas (suponha que α usa cores de $\{0, 1, \ldots, \Delta\}$).

$$\text{Sejam} \quad k = \lceil \Delta^{\frac{1}{3}} \rceil \quad \text{e} \quad l = \left\lfloor \frac{\Delta + \Delta^{\frac{3}{4}}}{k} \right\rfloor.$$

Vamos particionar os vértices de G em k classes $V_1, \ldots, V_k$ tais que cada vértice $v \in V(G)$ tem menos que l vizinhos em cada classe. Queremos colorir cada classe i usando as cores em $C_i = \{(i-1)l, \ldots, il-1\}$. Isso produziria uma kl coloração total de G, mas podem haver conflitos com as cores das arestas. Dizemos que uma aresta e é *conflitante* se $e \in M_i$ e uma das pontas de e recebeu uma cor que está em C_i. Note que uma aresta pode ser conflitante mesmo que receba uma cor diferente das cores usadas em suas pontas. Vamos definir "conflito" assim, para facilitar a análise.

Temos que provar, então, que é possível particionar $V(G)$ em k classes $V_1, \ldots, V_k$ de forma que:

(i) para cada vértice v e classe i, $|V_i \cap \Gamma(v)| < l$;

(ii) para cada vértice v, existem no máximo $\Delta^{\frac{3}{4}} - 2$ arestas uv tais que $u \in V_i$ e uv tem uma cor em C_i.

Note que isso basta para podermos colorir o grafo com o número de cores que gostaríamos: colorimos os vértices de cada classe com l cores; os vértices todos ficam, então, coloridos com no máximo $kl \leq \Delta + \Delta^{\frac{3}{4}}$ cores; as arestas estão coloridas com $\Delta + 1$ cores (as mesmas usadas nos vértices) e temos no máximo $\Delta^{\frac{3}{4}} - 1$ arestas conflitantes incidentes em cada vértice ($\Delta^{\frac{3}{4}} - 1$ arestas pois possivelmente existe uma aresta que recebeu a mesma cor que v). Podemos então colorí-las com no máximo $\Delta^{\frac{3}{4}}$ novas cores (pois o grafo gerado pelas arestas conflitantes tem grau no máximo $\Delta^{\frac{3}{4}} - 1$), assim conseguimos uma coloração total de G que usa no máximo $\Delta + 2\Delta^{\frac{3}{4}}$ cores.

Para provar a existência de uma partição satisfazendo (i) e (ii), vamos sortear a classe de cada vértice uniformemente e independentemente. Seja $A_{v,i}$ o evento "ruim" em que o vértice v possui pelo menos l vizinhos na classe i (viola a condição(i)). Seja B_v outro evento ruim em que o vértice v viola a condição (ii). Se conseguirmos evitar todos os eventos $A_{v,i}$ e todos os eventos B_v, então estamos feitos. Vamos primeiro limitar a probabilidade desses eventos usando o limitante de Chernoff. Note que o número de vizinhos de um vértice que caem numa dada classe é a soma de Δ variáveis $\{0, 1\}$. O número arestas da forma uv que receberam uma cor i e $u \in V_i$ também. Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Pr}(A_{v,i}) &= \mathbf{Pr}\Big(\mathbf{BIN}\Big(\Delta, \frac{1}{k}\Big) \geq l\Big) \leq \mathbf{Pr}\Big(\mathbf{BIN}\Big(\Delta, \frac{1}{k}\Big) \geq \frac{\Delta + \Delta^{\frac{3}{4}}}{k}\Big) \\
&\leq \mathbf{Pr}\Big(\Big|\mathbf{BIN}\Big(\Delta, \frac{1}{k}\Big) - \frac{\Delta}{k}\Big| > \Delta^{\frac{5}{12}}\Big) \leq 2 \exp\big\{ - \Delta^{\frac{10}{12}} / 3\Delta^{\frac{2}{3}} \big\} \\
&\leq 2e^{-\frac{1}{3}\Delta^{\frac{1}{6}}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}(B_v) &= \mathbf{Pr}\Big(\mathbf{BIN}\Big(\Delta, \frac{1}{k}\Big) > \Delta^{\frac{3}{4}} - 1\Big) \\ &< \mathbf{Pr}\Big(\Big|\mathbf{BIN}\Big(\Delta, \frac{1}{k}\Big) - \frac{\Delta}{k}\Big| > \frac{\Delta}{k}\Big) < 2e^{-\frac{1}{3}\Delta^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

As probabilidades de ambos os eventos decrescem exponencialmente com Δ e são no máximo $p = 2e^{-\frac{1}{3}\Delta^{\frac{1}{6}}}$. Agora vamos limitar a dependência dessas variáveis para poder aplicar o Lema Local de Lovász. Repare que $A_{v,i}$ e B_v são mutuamente independentes de todos os eventos $A_{u,j}$ e B_u se o vértice u se encontra a uma distância pelo menos 3 de v. Assim, cada evento ruim é independente de todos exceto no máximo $d = 2((k+1)\Delta^2 + \Delta) + 1 \leq \Delta^3$ eventos. Mas $4pd < 1$ para delta suficientemente grande. Então, pelo Lema Local, sabemos que existe um modo de escolher a partição $V_1, \ldots, V_k$ de modo a satisfazer as condições (i) e (ii). E, portanto, é possível colorir G totalmente com $\Delta + 2\Delta^{\frac{3}{4}}$ cores, desde que Δ seja suficientemente grande. $\square$

Referências Bibliográficas

1. Noga Alon, *Restricted colorings of graphs*, Surveys in combinatorics, 1993 (Keele), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 187, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, pp. 1–33. MR **94g:**05033
2. Béla Bollobás, *Modern graph theory*, Springer-Verlag, New York, 1998. MR **99h:**05001
3. Michael Molloy and Bruce Reed, *Graph colouring and the probabilistic method*, Algorithms and Combinatorics, vol. 23, Springer-Verlag, Berlin, 2002. MR **2003c:**05001