

LISTA 3

- Seja K um corpo e seja L um corpo que é uma extensão de K . Mostre que se V é um K -espaço vetorial com base $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, então $L \otimes_K V$ é um L -espaço vetorial com base $\{1 \otimes x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.
- Seja R um anel, sejam M, M' R -módulos à direita e sejam N, N' R -módulos à esquerda. Sejam $f: M \rightarrow M'$ e $g: N \rightarrow N'$ homomorfismos de módulos. Mostre que existe um único homomorfismo de grupos $f \otimes g: M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$ tal que $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$, para todos $x \in M$ e $y \in N$.
- Sejam $M_R, M'_R, M''_R, N, N', N''$ e sejam $f_1, f_2, f \in \text{Hom}_R(M, M')$ e $g_1, g_2, g \in \text{Hom}_R(N, N')$. Demonstre as identidades abaixo:
 - $(f_1 + f_2) \otimes g = (f_1 \otimes g) + (f_2 \otimes g)$,
 - $f \otimes (g_1 + g_2) = (f \otimes g_1) + (f \otimes g_2)$,
 - $f \otimes 0 = 0 \otimes g = 0$,
 - $1_M \otimes 1_N = 1_{M \otimes_R N}$.
- Sejam $M_R, M'_R, M''_R, N, N', N''$ e sejam $f \in \text{Hom}_R(M, M')$, $f' \in \text{Hom}_R(M', M'')$, $g \in \text{Hom}_R(N, N')$, $g' \in \text{Hom}_R(N', N'')$. Mostre que $(f' \otimes g')(f \otimes g) = (f'f) \otimes (g'g)$.
- Sejam R e S álgebras sobre um anel comutativo K . Mostre que
 - $R \otimes_K S$ é uma K -álgebra com produto satisfazendo $(r \otimes s)(r' \otimes s') = rr' \otimes ss'$, para todos $r, r' \in R$ e $s, s' \in S$;
 - as funções $\gamma_R: r \mapsto r \otimes 1$ e $\gamma_S: s \mapsto 1 \otimes s$ são homomorfismos de K -álgebras de R e S , respectivamente, em $R \otimes_K S$ satisfazendo $\gamma_R(r)\gamma_S(s) = \gamma_S(s)\gamma_R(r)$, para todos $r \in R$ e $s \in S$.
 - Sejam R, S e T álgebras sobre um anel comutativo K . Sejam $f: R \rightarrow T$ e $g: S \rightarrow T$ homomorfismos de K -álgebras tais que $f(r)g(s) = g(s)f(r)$, para todos $r \in R$ e $s \in S$. Mostre que existe um único homomorfismo de K -álgebras $h: R \otimes_K S \rightarrow T$ tal que $h\gamma_R = f$ e $h\gamma_S = g$. (Note que essas duas condições sobre h são equivalentes a $h(r \otimes s) = f(r)g(s)$, para todos $r \in R$ e $s \in S$.)
- Sejam R e S álgebras sobre um anel comutativo K . Mostre que se M é um (R, S) -bimódulo, então M tem uma estrutura de $R \otimes_K S^{\text{op}}$ -módulo à esquerda e uma estrutura de $R^{\text{op}} \otimes_K S$ -módulo à direita tais que $(r \otimes s) \cdot m = rms$ e $m \cdot (r \otimes s) = rms$, para todos $r \in R, s \in S, m \in M$.
- Seja K um corpo e sejam m, n inteiros não negativos. Mostre que as K -álgebras $M_m(K) \otimes_K M_n(K)$ e $M_{mn}(K)$ são isomorfas.
- Seja R um anel e seja P um R -módulo à esquerda projetivo e finitamente gerado. Mostre que o R -módulo à direita $P^* = \text{Hom}_R(P, R)$ é projetivo e finitamente gerado.
- Mostre que não existe nenhum funtor $F: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ tal que $FG = Z(G)$, onde $Z(G)$ denota o centro do grupo G . (Sugestão: Considere homomorfismos convenientes $S_2 \rightarrow S_3$ e $S_3 \rightarrow S_2$.)
- Mostre que os funtores $\text{Hom}_R(R, -)$ e o funtor esquecimento de **mod**- R em **mod**- $\mathbb{Z}$ são naturalmente isomorfos.
- Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor. Mostre que se F é naturalmente isomorfo ao funtor identidade $1_{\mathcal{C}}$, então F é fiel e pleno.
- Sejam R e S anéis, seja $F: \mathbf{mod}\text{-}R \rightarrow \mathbf{mod}\text{-}S$ um funtor covariante aditivo e seja $G: \mathbf{mod}\text{-}R \rightarrow \mathbf{mod}\text{-}S$ um funtor contravariante aditivo. Mostre que se $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ é uma sequência exata que

cinde em **mod-R**, então $0 \rightarrow FL \xrightarrow{F(f)} FM \xrightarrow{F(g)} FN \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow GN \xrightarrow{G(g)} GM \xrightarrow{G(f)} GL \rightarrow 0$ são sequências exatas que cindem em **mod-S**.

13. Seja R um anel. Mostre que existem isomorfismo naturais entre os funtores abaixo:

- (a) $1_{R\text{-mod}}$ e $\text{Hom}_R(R, -)$ de $R\text{-mod}$ em $R\text{-mod}$.
- (b) $1_{R\text{-mod}}$ e $(R \otimes_R -)$ de $R\text{-mod}$ em $R\text{-mod}$.

14. Seja R um anel, seja M um R -módulo à direita e seja $\{N_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de R -módulos à direita. Mostre que existem isomorfismos de $\mathbb{Z}$ -módulos

$$\text{Hom}_R\left(M, \prod_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda\right) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(M, N_\lambda) \quad \text{e} \quad \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda, M\right) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(N_\lambda, M).$$

15. Seja R um anel, seja M um R -módulo à direita finitamente gerado e seja $\{N_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de R -módulos à direita. Mostre que $\text{Hom}_R(M, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(M, N_\lambda)$, como $\mathbb{Z}$ -módulos.

16. Seja R um anel e seja $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ uma sequência exata em **mod-R**. Mostre que se L e N forem planos, então M é plano.

17. Sejam R e S anéis e seja $F : \mathbf{mod}\text{-}R \rightarrow \mathbf{mod}\text{-}S$ um funtor covariante e aditivo. Dizemos que F é *exato* se para toda sequência exata curta $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ de **mod-R**, a sequência de **mod-S** obtida aplicando F , qual seja, $0 \rightarrow FL \xrightarrow{F(f)} FM \xrightarrow{F(g)} FN \rightarrow 0$, for exata. Mostre que F é exato se, e somente se, para toda sequência exata $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ de **mod-R**, a sequência $FL \xrightarrow{F(f)} FM \xrightarrow{F(g)} FN$ for exata em **mod-S**. Conclua que se F é exato então F manda sequências exatas arbitrárias de **mod-R** em sequências exatas de **mod-S**.

18. Mostre que um anel R é semi-simples se, e somente se, para todo anel S , qualquer funtor covariante e aditivo $F : \mathbf{mod}\text{-}R \rightarrow \mathbf{mod}\text{-}S$ for exato.

19. Seja R um anel e seja $S \subseteq Z(R)$ um subconjunto multiplicativamente fechado. Seja M um R -módulo à direita finitamente gerado. Mostre que $S^{-1}M = 0$ se, e somente se, existir $s \in S$ tal que $Ms = 0$.

20. Seja R um anel e seja $S \subseteq Z(R)$ um subconjunto multiplicativamente fechado. Seja $\lambda : R \rightarrow S^{-1}R$ o homomorfismo natural definido por $\lambda(a) = a/1$, para todo $a \in R$. Seja $\bar{R} = R/\ker \lambda$, seja $\pi : R \rightarrow \bar{R}$ o homomorfismo canônico e seja $\bar{S} = \pi(S)$. Mostre que $\bar{S} \subseteq Z(\bar{R})$, que $\bar{S}$ é um subconjunto multiplicativamente fechado de $\bar{R}$ e que os anéis $S^{-1}R$ e $\bar{S}^{-1}\bar{R}$ são isomorfos.

21. Seja R um anel e sejam $S, T \subseteq Z(R)$ dois subconjuntos multiplicativamente fechados tais que $S \subseteq T$. Mostre que existe um homomorfismo de anéis $\phi : S^{-1}R \rightarrow T^{-1}R$ que satisfaz, para todo $a/s \in S^{-1}R$, $\phi(a/s) = a/s$, visto como um elemento de $T^{-1}R$. Além disso, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) ϕ é um isomorfismo.
- (ii) Para cada $t \in T$, $t/1$ é inversível em $S^{-1}R$.
- (iii) Para cada $t \in T$, existe $a \in R$ tal que $at \in S$.

22. Seja R um anel e seja Q um R -módulo à direita injetivo. Mostre que todo somando direto de Q é injetivo.

23. Mostre que um anel R é semi-simples se, e somente se, todo ideal à direita de R for um R -módulo injetivo.