LISTA 2

1. Sejam R um anel e sejam $e, f \in R$ elementos idempotentes. Mostre que $Re + Rf = Re \oplus R(f - fe)$.
2. Seja R um anel e sejam I, J ideais à esquerda de R. Mostre que as condições abaixo são equivalentes.
   (a) ${}_RR = I \oplus J$.
   (b) Existem idempotentes $e, f \in R$ tais que $1 = e + f$, $ef = fe = 0$ e tais que $I = Re, J = Rf$.
3. Seja I um ideal à esquerda de um anel R. Mostre que se I for um somando direto de ${}_RR$, então $I^2 = I$. (Aqui I^2 denota o ideal à esquerda de R gerado por $\{xy : x, y \in I\}$.)
4. Seja R um anel. Dada uma seqüência exata de R-módulos à direita de comprimento finito,
$$0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_r \to 0,$$
   mostre que $\sum_{i=1}^{r} (-1)^i \, \mathrm{c}(M_i) = 0$.
5. Seja R um anel e sejam M um R-módulo à direita não trivial. Mostre que as condições abaixo são equivalentes.
   (a) M é simples.
   (b) $M = mR$, para todo $m \in M$, $m \neq 0$.
   (c) $M \cong R_R/J$, para algum ideal à direita maximal J de R.
6. Mostre que as seguintes condições sobre um anel R são equivalentes:
   (a) R é local;
   (b) Para todo $a \in R$, se a não for inversível, então $1 - a$ será inversível;
   (c) R tem um único ideal à direita maximal;
   (d) R tem um único ideal à esquerda maximal.
7. Quais são os $\mathbb{Z}$-módulos semi-simples?
8. Seja R um anel noetheriano à esquerda e seja n um inteiro positivo. Mostre que $\mathsf{M}_n(R)$ é um anel noetheriano à esquerda.
9. Seja R um domínio. Mostre que se R for artiniano à direita, então R será um anel com divisão.
10. Seja R um anel e sejam M um R-módulo à direita semi-simples. Mostre que as condições abaixo são equivalentes.
    (a) M é finitamente gerado.
    (b) M é noetheriano.
    (c) M é artiniano.
    (d) M é uma soma direta finita de submódulos simples.
11. Seja R um anel e seja F um R-módulo à direita. Mostre que as condições abaixo sobre F são equivalentes.
    (a) F é livre.
    (b) Existe um conjunto I tal que $F \cong R_R^{(I)}$.
    (c) Existe um conjunto I e uma função $\varphi \colon I \to F$ tais que dados qualquer R-módulo à direita M e qualquer função $\psi \colon I \to M$ existe um único homomorfismo $f \colon F \to M$ tal que $f\varphi = \psi$.
    (Observe que nas implicações (b)$\Rightarrow$(a) e (c)$\Rightarrow$(a) obtemos uma base para F equipotente com I.)
12. Seja R um anel e seja $\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de R-módulos à direita. Mostre que $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ é projetivo se, e somente se, P_λ for projetivo, para todo $\lambda \in \Lambda$.
13. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo projetivo.
14. Seja R um anel e seja $e \in R$ um idempotente. Mostre que o ideal à direita eR de R é um R-módulo à direita projetivo.

15. Seja R um anel e seja P um R-módulo à direita. Dado um conjunto de índices I, dizemos que um par ordenado de famílias $\big(\{x_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\big)$, onde $x_i \in P$ e $f_i \in \mathrm{Hom}_R(P, R_R)$, para todo $i \in I$, é uma *base dual* para P se para todo $x \in P$ as duas condições abaixo estiverem satisfeitas:
    (i) $\mathrm{Sup}(x) = \{i \in I : f_i(x) \neq 0\}$ for finito e
    (ii) $x = \sum_{i\in \mathrm{Sup}(x)} f_i(x)x_i$.
    Mostre que P é projetivo se, e somente se, P tiver uma base dual. (Este resultado é conhecido na literatura como **Lema da Base Dual**.)
16. Mostre que o centro de um anel semi-simples é um produto direto finito de corpos.
17. Seja R um domínio e seja n um inteiro positivo. Mostre que se $\mathsf{M}_n(R)$ for semi-simples, então R é um anel com divisão. (*Sugestão:* Mostre que R é artiniano à esquerda e use o exercício 12 da lista 1.)