LISTA 1

1. Seja k um corpo, seja n um inteiro positivo e seja $R = \mathsf{M}_n(k)$, o anel das matrizes $n \times n$ sobre k. Considere o subconjunto T de R formado pelas matrizes triangulares superiores, isto é,
$$T = \{(a_{ij}) \in R : a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\},$$
e o subconjunto I de R formado pelas matrizes triangulares superiores de diagonal nula, isto é,
$$I = \{(a_{ij}) \in R : a_{ij} = 0 \text{ se } i \geq j\}.$$
Mostre que T é um subanel de R, que I é um ideal de T e que $T/I \cong k \times \cdots \times k$ (n fatores).

2. Considere o subconjunto S do anel $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ definido por $S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$. Mostre que S é um subanel de $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ e que a função
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{H} & \longrightarrow & S \\ a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a+b\mathbf{i} & -c-d\mathbf{i} \\ c-d\mathbf{i} & a-b\mathbf{i} \end{pmatrix} \end{array},$$
onde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, é um isomorfismo entre o anel dos quatérnios $\mathbb{H}$ e S. Calcule as imagens de $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

3. Seja R um anel e seja X um subconjunto de R. Defina o *centralizador* de X em R como sendo o conjunto
$$\mathrm{Cen}_R(X) = \{a \in R : ax = xa, \text{ para todo } x \in X\}.$$
   (a) Mostre que $\mathrm{Cen}_R(X)$ é um subanel de R e que $X = \mathrm{Cen}_R(X)$ se e somente se X for um subanel comutativo maximal de R.
   (b) Mostre que se $a \in \mathrm{Cen}_R(X)$ for inversível em R, então seu inverso está em $\mathrm{Cen}_R(X)$.

4. Seja R um anel, defina o *centro* de R por $Z(R) = \mathrm{Cen}_R(R)$. (Ver exercício 3.)
   (a) Seja $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Mostre que $Z(\mathsf{M}_n(R)) = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z \end{pmatrix} : z \in Z(R) \right\}$.
   (b) Mostre que o centro de um anel simples é um corpo. (Dizemos que um anel S é *simples* se seus únicos ideais forem $\{0\}$ e S.)

5. Seja R um anel, sejam M e N R-módulos à direita e seja $f\colon M \to N$ um homomorfismo. Dizemos que f é um *epimorfismo* se para todos homomorfismo de R-módulos à direita $g,h\colon N \to L$ tais que $gf = hf$ tivermos $g = h$ (em outras palavras, f é "cancelável" à direita). Dizemos que f é um *monomorfismo* se para todos homomorfismos de R-módulos à direita $g,h\colon L \to M$ tais que $fg = fh$ tivermos $g = h$ (isto é, f é "cancelável" à esquerda).
   (a) Mostre que f é um epimorfismo se, e somente se, f for sobrejetor.
   (b) Mostre que f é um monomorfismo se, e somente se, f for injetor.

6. Sejam R e S anéis e seja $\varphi\colon R \to S$ um homomorfismo de anéis. Dizemos que φ é um *epimorfismo* se para todos homomorfismos de anéis $\alpha, \beta\colon\ S \to T$ tais que $\alpha\varphi = \beta\varphi$ tivermos $\alpha = \beta$.
   (a) Mostre que um homomorfismo sobrejetor de anéis é um epimorfismo.
   (b) Mostre que a inclusão $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ é um epimorfismo que não é sobrejetor.
   (c) Defina *monomorfismo* de anéis.
   (d) É verdade que um homomorfismo de anéis é um monomorfismo se, e somente se, for injetor? (Aqui, uma implicação é verdadeira e fácil de demonstrar. No caso da outra, se você não conseguir responder, dê uma olhada na Proposition 1.2 em *Basic Algebra II*, N. Jacobson.)

7. Seja R um anel, seja M um R-módulo à direita e sejam A,B,C submódulos de M tais que $B \subseteq A$. Mostre que $A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$.

8. Seja R um anel e seja M um R-módulo à direita. Seja X um subconjunto de M. Defina o *anulador* de X como sendo o seguinte subconjunto de R, $\operatorname{Ann}(X) = \{a \in R : xa = 0, \text{ para todo } x \in X\}$.
   (a) Mostre que $\operatorname{Ann}(X)$ é um ideal à direita de R e que se X for um submódulo de M, então $\operatorname{Ann}(X)$ é um ideal de R.
   (b) Seja Y um subconjunto de M. Mostre que se $X \subseteq Y$, então $\operatorname{Ann}(X) \supseteq \operatorname{Ann}(Y)$.
   (c) Seja N um R-módulo à direita. Mostre que se $M \cong N$, então $\operatorname{Ann}(M) = \operatorname{Ann}(N)$.
   (d) Seja $\{M_i : i \in I\}$ uma família de submódulos de M tais que $M = \sum_{i \in I} M_i$. Mostre que $\operatorname{Ann}(M) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ann}(M_i)$.
   (e) Mostre que se M for um ideal à direita de R, então $\operatorname{Ann}(R_R/M)$ é o maior ideal J de R tal que $J \subseteq M$.
   (f) Mostre que se $M = mR$, então $M \cong R_R/N$, onde $N = \operatorname{Ann}(m)$.

9. Seja R um anel e seja N um ideal à direita de R.
   (a) Mostre que R_R/N é um R-módulo cíclico.
   (b) Seja $S = \{a \in R : aN \subseteq N\}$. Mostre que S é um subanel de R que contém N como ideal e que $\operatorname{End}_R(R_R/N) \cong S/N$ como anéis.

10. Seja R um anel e seja M um R-módulo à direita. Dizemos que M é *finitamente cogerado* se para toda família $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de submódulos de M que satisfaz $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = 0$ existir um subconjunto finito Γ de Λ tal que $\bigcap_{\lambda \in \Gamma} M_\lambda = 0$. Mostre que M é artiniano se, e somente se, todo módulo quociente de M for finitamente cogerado.

11. Seja R um anel, seja M um R-módulo à direita e seja $f \in \operatorname{End}_R(M)$. Mostre que cada uma das condições abaixo implica que f é um automorfismo:
   (a) f é injetor e M é artiniano;
   (b) f é sobrejetor e M é noetheriano.
   Tente encontrar contra-exemplos para módulos sem condição de cadeia.

12. Dizemos que um anel R é um *domínio* se $1 \neq 0$ e para todos $a, b \in R$, $ab = 0$ implicar $a = 0$ ou $b = 0$. Mostre que se um domínio contiver um ideal à esquerda minimal, então ele será um anel com divisão. (Em particular, segue que todo domínio artiniano à esquerda é um anel com divisão.)

13. Mostre que o anel $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} n & r \\ 0 & s \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z}, r, s \in \mathbb{Q} \right\}$ é noetheriano à direita, mas não é noetheriano à esquerda.

14. Seja R um anel. Suponha que o seguinte diagrama de R-módulos à direita e homomorfismos

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & N \arrow[d, "\gamma"'] \\ L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \end{tikzcd}$$

   seja comutativo e tenha linhas exatas. Demonstre as implicações abaixo.
   (a) Se α, γ e f' são injetores, então β é injetor.
   (b) Se α, γ e g são sobrejetores, então β é sobrejetor.
   (c) Se β é injetor e se α e g são sobrejetores, então γ é injetor.
   (d) Se β é sobrejetor e se f' e γ são injetores, então α é sobrejetor.

15. Seja R um anel. Suponha que o seguinte diagrama de R-módulos à direita e homomorfismos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\varepsilon"'] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

   seja comutativo e tenha linhas exatas. Demonstre as implicações abaixo.
   (a) Se α é sobrejetor e β e δ são injetores, então γ é injetor.
   (b) Se ε é injetor e β e δ são sobrejetores, então γ é sobrejetor.
   (c) Se α, β, δ e ε são isomorfismos, então γ é um isomorfismo.
   (Este resultado é conhecido como **Lema dos Cinco**.)