LISTA 1

1. Seja k um corpo, seja n um inteiro positivo e seja $R = M_n(k)$, o anel das matrizes $n \times n$ sobre k. Considere o subconjunto T de R formado pelas matrizes triangulares superiores, isto é,

$$T = \{(a_{ij}) \in R : a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\},\$$

e o subconjunto I de R formado pelas matrizes triangulares superiores de diagonal nula, isto é,

$$I = \{(a_{ij}) \in R : a_{ij} = 0 \text{ se } i \ge j\}.$$

Mostre que T é um subanel de R, que I é um ideal de T e que $T/I \cong k \times \cdots \times k$ (n fatores).

2. Considere o subconjunto S do anel $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ definido por $S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$. Mostre que S é um subanel de $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ e que a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & S \\ a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a+b\mathbf{i} & -c-d\mathbf{i} \\ c-d\mathbf{i} & a-b\mathbf{i} \end{pmatrix} \end{array},$$

onde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, é um isomorfismo entre o anel dos quatérnios \mathbb{H} e S. Calcule as imagens de $1,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$.

3. Seja R um anel e seja X um subconjunto de R. Defina o centralizador de X em R como sendo o conjunto

$$\operatorname{Cen}_R(X) = \{ a \in R : ax = xa, \text{ para todo } x \in X \}.$$

- (a) Mostre que $\operatorname{Cen}_R(X)$ é um subanel de R e que $X = \operatorname{Cen}_R(X)$ se e somente se X for um subanel comutativo maximal de R.
- (b) Mostre que se $a \in \operatorname{Cen}_R(X)$ for inversível em R, então seu inverso está em $\operatorname{Cen}_R(X)$.
- 4. Seja R um anel, defina o *centro* de R por $Z(R) = \operatorname{Cen}_R(R)$. (Ver exercício 3.)

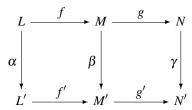
(a) Seja
$$n \in \mathbb{Z}$$
, $n \ge 1$. Mostre que $Z(\mathsf{M}_n(R)) = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z \end{pmatrix} : z \in Z(R) \right\}$.

- (b) Mostre que o centro de um anel simples é um corpo. (Dizemos que um anel *S* é *simples* se seus únicos ideais forem {0} e *S*.)
- 5. Seja R um anel, sejam M e N R-módulos à direita e seja $f: M \to N$ um homomorfismo. Dizemos que f é um epimorfismo se para todos homomorfismo de R-módulos à direita $g,h: N \to L$ tais que gf = hf tivermos g = h (em outras palavras, f é "cancelável" à direita). Dizemos que f é um monomorfismo se para todos homomorfismos de R-módulos à direita $g,h: L \to M$ tais que fg = fh tivermos g = h (isto é, f é "cancelável" à esquerda).
 - (a) Mostre que f é um epimorfismo se, e somente se, f for sobrejetor.
 - (b) Mostre que f é um monomorfismo se, e somente se, f for injetor.
- 6. Sejam R e S anéis e seja $\varphi: R \to S$ um homomorfismo de anéis. Dizemos que φ é um *epimorfismo* se para todos homomorfismos de anéis $\alpha, \beta: S \to T$ tais que $\alpha \varphi = \beta \varphi$ tivermos $\alpha = \beta$.
 - (a) Mostre que um homomorfismo sobrejetor de anéis é um epimorfismo.
 - (b) Mostre que a inclusão $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ é um epimorfismo que não é sobrejetor.
 - (c) Defina monomorfismo de anéis.
 - (d) É verdade que um homomorfismo de anéis é um monomorfismo se, e somente se, for injetor? (Aqui, uma implicação é verdadeira e fácil de demonstrar. No caso da outra, se você não conseguir responder, dê uma olhada na Proposition 1.2 em *Basic Algebra II*, N. Jacobson.)
- 7. Seja R um anel, seja M um R-módulo à direita e sejam A,B,C submódulos de M tais que $B \subseteq A$. Mostre que $A \cap (B+C) = B + (A \cap C)$.

- 8. Seja R um anel e seja M um R-módulo à direita. Seja X um subconjunto de M. Defina o *anulador* de X como sendo o seguinte subconjunto de R, Ann $(X) = \{a \in R : xa = 0, \text{ para todo } x \in X\}$.
 - (a) Mostre que Ann(X) é um ideal à direita de R e que se X for um submódulo de M, então Ann(X) é um ideal de R.
 - (b) Seja *Y* um subconjunto de *M*. Mostre que se $X \subseteq Y$, então $Ann(X) \supseteq Ann(Y)$.
 - (c) Seja N um R-módulo à direita. Mostre que se $M \cong N$, então Ann(M) = Ann(N).
 - (d) Seja $\{M_i : i \in I\}$ uma família de submódulos de M tais que $M = \sum_{i \in I} M_i$. Mostre que $Ann(M) = \bigcap_{i \in I} Ann(M_i)$.
 - (e) Mostre que se M for um ideal à direita de R, então $Ann(R_R/M)$ é o maior ideal J de R tal que $J \subseteq M$.
 - (f) Mostre que se M = mR, então $M \cong R_R/N$, onde N = Ann(m).
- 9. Seja R um anel e seja N um ideal à direita de R.
 - (a) Mostre que R_R/N é um R-módulo cíclico.
 - (b) Seja $S = \{a \in R : aN \subseteq N\}$. Mostre que S é um subanel de R que contém N como ideal e que $\operatorname{End}_R(R_R/N) \cong S/N$ como anéis.
- 10. Seja R um anel e seja M um R-módulo à direita. Dizemos que M é *finitamente cogerado* se para toda família $(M_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ de submódulos de M que satisfaz $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_{\lambda} = 0$ existir um subconjunto finito Γ de Λ tal que $\bigcap_{\lambda \in \Gamma} M_{\lambda} = 0$. Mostre que M é artiniano se, e somente se, todo módulo quociente de M for finitamente cogerado.
- 11. Seja R um anel, seja M um R-módulo à direita e seja $f \in \operatorname{End}_R(M)$. Mostre que cada uma das condições abaixo implica que f é um automorfismo:
 - (a) f é injetor e M é artiniano;
 - (b) f é sobrejetor e M é noetheriano.

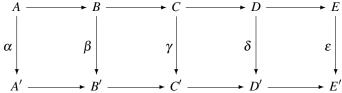
Tente encontrar contra-exemplos para módulos sem condição de cadeia.

- 12. Dizemos que um anel R é um domínio se $1 \neq 0$ e para todos $a, b \in R$, ab = 0 implicar a = 0 ou b = 0. Mostre que se um domínio contiver um ideal à esquerda minimal, então ele será um anel com divisão. (Em particular, segue que todo domínio artiniano à esquerda é um anel com divisão.)
- 13. Mostre que o anel $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} n & r \\ 0 & s \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z}, r, s \in \mathbb{Q} \right\}$ é noetheriano à direita, mas não é noetheriano à esquerda.
- 14. Seja R um anel. Suponha que o seguinte diagrama de R-módulos à direita e homomorfismos



seja comutativo e tenha linhas exatas. Demonstre as implicações abaixo.

- (a) Se α , γ e f' são injetores, então β é injetor.
- (b) Se α , γ e g são sobrejetores, então β é sobrejetor.
- (c) Se β é injetor e se α e g são sobrejetores, então γ é injetor.
- (d) Se β é sobrejetor e se f' e γ são injetores, então α é sobrejetor.
- 15. Seja R um anel. Suponha que o seguinte diagrama de R-módulos à direita e homomorfismos



seja comutativo e tenha linhas exatas. Demonstre as implicações abaixo.

- (a) Se α é sobrejetor e β e δ são injetores, então γ é injetor.
- (b) Se ε é injetor e β e δ são sobrejetores, então γ é sobrejetor.
- (c) Se α, β, δ e ε são isomorfismos, então γ é um isomorfismo.

(Este resultado é conhecido como Lema dos Cinco.)