RETICULADOS: NOTAS DO SEMINÁRIO DE 7/03/03

PEDRO A. TONELLI

1. Introdução: o esqueleto do espírito

E ainda mais remoto que o tempo em que as coisas não tinham nome, é o tempo em que as coisas nem existiam, e talvez por isso o tempo também não existia. E era necessário criar as coisas, a partir do verbo, a partir das idéias e de simples axiomas.

As coisas existem desde que existam interações entre elas. O mundo dessas coisas seguem determinadas regras de interações, que repetidas e reproduzidas constroem a dinamica de um mundo em evolução e complexificado onde as regras mais simples já caminham escondidas em teoremas enigmáticos.

Em matemática temos um conceito definido do seja uma relação, e podemos interpretar as estruturas algébricas, ou a álgebra mesmo, como a descrição de regras de interação entre coisas. Uma tarefa da álgebra seria identificar e dirscernir as regras de interações necessárias e suficientes para para que se inicie a evolução daquele mundo. Note-se que dois mundos totalmente distintos podem ser, do ponto de vista algébrico desde que haja uma correspondência entre suas regras de interações básicas. Assim como a álgebra pre-existe à coisa e da estrutura ao seu espírito, podemos dizer que a álgebra é o esqueleto do espírito.

Al djabr significa: por redução, e expressa um conjunto de regras que poderiam simplificar uma equação numérica tornando-a resolúvel. Esta origem árabe da palavra álgebra também reforça a idéia de que seria possível para diversos sistemas complexos, obter regras para reduzí-los a sistemas mais simples e resolúveis. Uma tal coleção de técnicas chamaremos álgebra.

Então a lógica possui uma álgebra?

2. A álgebra da lógica

Duas obras são precursoras no estudo das álgebras da lógica: *The investigation of the Laws of Thought* de G. Boole de 1854 e *Algebra der Logik* de E. Schroeder de 1900, ambas inspiraram o trabalho posterior de G. Birkhoff, *Theory of Lattices* de 1920.

No livro de Boole ele começa falando da álgebra das classes, que para nós é a álgebra da teoria de conjuntos. Ele assume que há uma classe universal, digamos U, e lista as propriedades da reunião e intersecção de conjuntos e o complemento em relação a U.

Lembremos estas propriedades fundamentais que caracterizam a *Álgebra de Boole*

B1 Se x denota um conjunto temos $x \cap x = x$ e $x \cup x = x$.

B2 Se x e y denotam conjuntos então $x \cap y = y \cap x$ e $x \cup y = y \cup x$. Lei Comutativa.

B3 $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$ e $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$. Lei Associativa.

B4 $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ Lei Distributiva.

denotando por x' o complemento de um conjunto em U temos que

B5 $x \cup x' = U$. $x \cap x' = \emptyset$ onde $\emptyset$ é o conjunto vazio.

Esta estrutura básica é usada depois para se provar vários resultados. As identidades de De Morgan são um exemplo. Um conjunto, no qual definimos duas operações binárias, e uma operação unária que satisfazem **1 - 5** com dois elementos especiais que fazem a função do conjunto universo e conjunto vazio, dizemos que é uma álgebra de Boole. Um exemplo trivial de uma álgebra de Boole é o conjunto $\{0, 1\}$ tomando os operadores de máximo e mínimo entre números no lugar da intersecção. Veremos a seguir que podemos identificar essa estrutura algébrica com o cálculo proposicional da lógica clássica, mas que isso não esgota as álgebras da lógica.

3. Cálculo proposicional clássico

Um estóico de nome Crisifo disse que uma proposição é algo que é verdadeiro ou falso. Isto é a pedra fundamental do cálculo proposicional em lógica uma vez que avalia uma proposição só pelo seu valor de verdade. Usando 1 para designar verdade e 0 para designar falso, podemos definir conectivos $\vee$ ("OU"lógico) e $\wedge$ ("E"lógico) que serão as interações entre proposições. Podemos expressá-los usando a tabela verdade dos conectivos:

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Tabela 1. Tabela verdade

Supondo que a interpretação desta tabela já seja conhecida vejamos algumas conseqüências que dela decorrem. Lembremos que duas proposições compostas são equivalentes os seu valores verdade forem os mesmos não importando o valor de seus componentes. Por exemplo: $a \wedge b = b \wedge a$ significa que os valores das duas expressões é o mesmo para todas as possibilidades de a e b. No livro isto está formalizado no capítulo 4.

R1 (comutatividade) $a \wedge b = b \wedge a$ e $a \vee b = b \vee a$.

R2 (associatividade)$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ e $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

R3 (absorção) $a \wedge (a \vee b) = a$ e $a \vee (a \wedge b) = a$

Um conjunto M com duas operações binárias que satisfazem **R1 - R3** é chamado de um reticulado. Os reticulados são o tipo de estruturas algébricas que estão mais ligados com a lógico e este foi o ponto principal do trabalho de Schroeder. Note que da nossa tabela verdade da lógica clássica ainda podemos destacar as seguintes propriedades:

Dist. Valem as propriedades distributivas: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ e também $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Definindo a proposição $\neg a$ pela tabela:

a	$\neg a$
0	1
1	0

TABELA 2. Tabela verdade da negação

Comp. $a \wedge \neg a = \bot$ e $a \vee \neg a = \top$

Aqui $\bot$ é uma proposição sempre falsa e $\top$ uma proposição sempre verdadeira. De forma que elas satisfazem:

Top $a \wedge \top = a$ e $a \vee \top = \top$

Bot $a \wedge \bot = \bot$ e $a \vee \bot = a$

Uma álgebra de Boole é um reticulado que satisfaz **Dist. Comp. Top Bot**, ou seja, um reticulado, distributivo, complementado.

O cálculo proposicional clássico corresponde a uma álgebra de boole. Haveriam outros reticulados correspondentes a outras lógicas?

4. O cálculo proposicional de Brouwer

Em sua tese de 1907 o matemático americano L. E. J. Brower defendeu que o principio do terceiro excluído deveria deixar de ser usado na provas matemáticas. Este príncipio está codificado na nossa definição da negação dada acima. Assim para a lógica proposta por Brower não teremos mais a nossa algebra de Boole, mas será que teremos algum ente algébrico que represente o novo cálculo proposicional?

Uma forma de fazer isso é introduzir uma relação de implicação entre as proposições e a partir dela construir os outros conectivos "E" e "OU".

Dizemos que uma proposição a implica uma proposição b se b é verdade sempre que a for verdade. Usaremos o símbolo $a \to b$ para denotar que a implica b. Note que esta definição não diz o que acontece quando a for falso.

Note que a definição acima nos dá uma relação entre proposições, tomaremos a liberdade de identificá-la também com um conectivo extra. Para completar diremos que $a \to b$ é verdadeiro sempre que a for falso, não importa o valor de b. Claro que esta definição leva a inúmeras discussões, mas vamos tomá-la por certa por um momento.

Usando a tabela da lógica clássica e a nova definição de implicação temos os seguintes resultados:

Br1 $a \to a$.
Br2 $a \wedge b \to a$ e $a \wedge b \to b$.
Br3 $a \to (a \vee b)$ e $b \to (a \vee b)$.
Br4 Se $a \to b$ e $b \to c$ então $a \to c$ ou $(a \to b), (b \to c) \implies a \to c$.
Br5 Se $c \to a$ e $c \to b$ então $c \to a \wedge b$.
Br6 Se $a \to c$ e $b \to c$ então $a \vee b \to c$.
Br7 Se $(a \wedge b) \to c$ então $a \to (b \to c)$.
Br8 Se $a \to (b \to c)$ então $(a \wedge b) \to c$.

Note que estas propriedades não usam a negação e a proposta de Brower foi substituir as tabelas verdades por um sistema formal onde as regras de deduções fossem dadas somente pelos axiomas **Br1-8** (Lógica positiva das consequencias. Com esses axiomas vejamos o quanto recuperamos do cálculo proposicional.

A álgebra determinada pelos axiomas de Brower pode ser descrita com mais detalhe da seguinte forma:

Seja M um conjunto (lembremos que nem mesmo as coisas existem) e uma relação binária entre os elementos deste conjunto que denotaremos por $\to$. Assuma que esta relação satisfaça apenas os axiomas **Br1** e **Br4** e também que se $a \to b$ e $b \to a$ então $a = b$.

Suponha agora que para cada par de elementos $a, b \in M$ exista um terceiro elemento c que satisfaz a propriedade: $c \to a$ e $c \to b$. Se $d \to a$ e $d \to b$ então $d \to c$. Este elemento c é único e como depende de a e b podemos denotá-lo por $a \wedge b$. (Note que esta é uma forma de definir o conectivo a partir da implicação). É fácil verificar que, definido desta forma, este elemento satisfaz **Br2** e **Br5**.

Vamos obter o outro conectivo de forma parecida:

Suponha que para cada par de elementos $a, b \in M$ exista um terceiro elemento c que satisfaz a propriedade: $a \to c$ e $b \to c$. Se $a \to d$ e $b \to d$

então $c \to d$. Novamente este elemento deverá ser único e denotado por $a \vee b$ vai satisfazer os axiomas **Br3** e **Br6**.

O que vimos é que a relação $\to$ define na verdade uma ordem parcial no conjunto M. E a existência dos elementos $a \vee b$ e $a \wedge b$ transformam o conjunto parcialmente ordenado num reticulado.

Os axiomas **Br7** e **Br8** são propriedades extras da álgebra de Brower e podem ser algebricamente descritos da seguinte forma.

Suponha que valha o seguinte: Para cada par $a, b \in M$ existe um c tal que para todo x, se $x \wedge a \to b$ então $x \to c$ e se $x \to c$ então $x \wedge a \to b$ Se esta propridade estiver satisfeita, o reticulado obtido e chamado reticulado de Brower ou reticulado subjuntivo. E identificando este elemento com o valor de $a \to b$ obtemos os axiomas **Br7** e **Br8**.

Bom isto é só um ensaio para justificar porque aparecem os reticulados nas álgebras originadas da lógica e motivar um pouco o estudo das propriedades de reticulados.