Relações Fuzzy e implicações

Em primeiro lugar vamos considerar como a implicação da lógica clássica gera uma relação.
Consideremos dois subconjuntos U e V que serão usados como conjuntos universos de um determinado contexto. Fixemos dois subconjuntos $A \subset U$ e $B \subset V$ e consideremos as proposições:

$$p = x \in A \tag{1}$$
$$q = y \in B \tag{2}$$

Vamos interpretar a frase: **se** x está em A **então** y está em B como a implicação material: $x \in A \to y \in B$. Note que para cada par $(x, y) \in U \times V$ o valor do operador implicação assume o valor zero ou um. De outra forma: para cada $(x, y) \in U \times V$ podemos calcular $\chi_A(x) \to \chi_B(y) \in \{0, 1\}$. Esta função determina um subconjunto de $U \times V$ (O subconjunto onde a implicação é verdadeira, isto é assume o valor 1). Este subconjunto é fácil de calcular: $(A^c \times V) \cup (A \times B)$. Veja a figura 1.

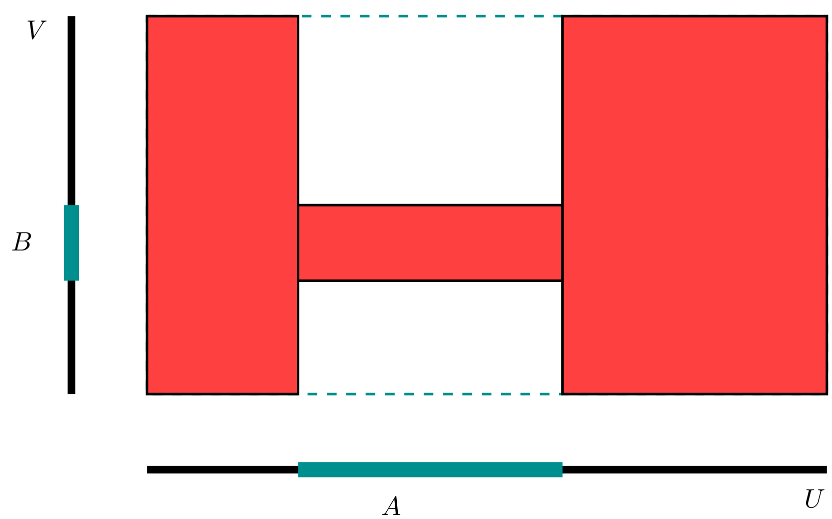

Figura 1: Relação de implicação.

Note que este conjunto pode ser escrito também nas seguintes formas:

- $(A \times V)^c \cup (U \times B)$
- $(A \times V)^c \cup (A \times V \cap U \times B)$
- $\bigvee\{D \subset U \times V : D \cap (A \times V) \subset U \times B\}$

Vamos agora analisar o caso fuzzy. Consideremos uma implicação fuzzy.

$$\to : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \tag{3}$$

fixada de uma vez por todas. Consideremos ainda os mesmos conjuntos universos U e V como acima e dois subconjuntos fuzzy $A \in \mathcal{F}(U)$ e $B \in \mathcal{F}(V)$. Como acima podemos interpretar a frase:
se x é A **então** y é B como uma função

$$R(x, y) = A(x) \rightarrow B(y) \tag{4}$$

Que é uma função de $U \times V$ em $[0, 1]$, e portanto uma relação fuzzy em $U \times V$.
Note que se os subconjuntos fuzzy A e B forem na verdade conjuntos normais (crisp sets) então esta nova relação dará exatamente o conjunto anterior, não importa qual seja a implicação escolhida.
Resumo: Dada uma implicação fuzzy e uma regra fuzzy do tipo: **se** x é A **então** y é B Construimos uma relação fuzzy $R(x, y)$ em $U \times V$, que vai representar esta regra.
Obs:. A regra do tipo **se** x é A **então** y é B **senão** y é C no caso clássico pode ser associada ao subconjunto $A \times B \cup A^c \times C$. Este subconjunto também pode ser escrito como $((A^c \times V) \cup (A \times B)) \cap ((A \times V) \cup (A^c \times C))$. A primeira componente antes da intersecção é a relação correspondente à regra: **se** x é A **então** y é B. E esta regra, como vimos, é traduzida pela implicação $\chi_A(x) \rightarrow \chi_B(y)$. Da mesma forma, a componete depois da intersecção corresponde à regra: **se** x é A^c **então** y é C. Ou seja, é a relação $(1 - \chi_A(x)) \rightarrow \chi_C(y)$. Em suma, pelo menos no caso clássico, a regra da forma: **se** x é A **então** y **senão** y é C pode ser representada pela relação:

$$R(x, y) = (\chi_A(x) \rightarrow \chi_B(y)) \wedge ((1 - \chi_A(x)) \rightarrow \chi_C(y)) \tag{5}$$

Embora estas expressões com **senão** possam ser questionadas na lógica fuzzy, uma vez que não vale o princípio do terceiro excluído, podemos interpretar estas regras como intersecção de regras normais. Ou seja, num contexto onde temos fixado um sistema de De Morgan $([0, 1], \Delta, \nabla, \eta)$ e definido uma implicação material $\rightarrow$ podemos interpretar a regra fuzzy: **se** x é A **então** y é B **senão** y é C como a relação fuzzy em $U \times V$:

$$R(x, y) = (A(x) \rightarrow B(y))\Delta(\eta(A(x)) \rightarrow C(y)) \tag{6}$$

Exemplos:

Relações Fuzzy:

Uma relação binária fuzzy nos conjuntos U e V é simplesmente um subconjunto fuzzy de $U \times V$. Esta definição concorda com a definição clássica de relações.
Se $R \in \mathcal{F}(U \times U)$ é uma relação binária no produto cartesiano de um mesmo conjunto, então diremos que a relação fuzzy é:

- Reflexiva: Quando $R(x, x) = 1, \forall x \in U$.
- Simétrica: Quando $R(x, y) = R(y, x), \forall (x, y) \in U \times U$.
- Antisimétrica: $R(x, y).R(y, x) \neq 0 \implies x = y$
- Δ-transitiva: Se $R(x, z) \geq \bigvee_{y \in U} R(x, y)\Delta R(y, z)$

Exemplos:
Seja $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação fuzzy. Se $A \in \mathcal{F}(U)$ é um subconjunto fuzzy de U definimos a imagem de A pela relação R como o subconjunto fuzzy B de V da seguinte forma:

$$R(A)(y) = \bigvee_{x \in U} R(x, y) \wedge A(x) \tag{7}$$

Note que se A e a relação R forem normais (não fuzzy) esta definição coincide com a definição de imagem de um subconjunto por uma relação, ou seja, $R(A) = \{y \in V : \exists x \in A \text{ tal que } (x, y) \in R\}$.
Lembremos também da definição de imagem inversa de uma relação. Se B é um subconjunto de V o conjunto dos pontos x de U tal que existe pelo menos um $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$ é chamado de imagem inversa de B pela relação R (uma função é um tipo particular de relação).
A generalização fuzzy deste conceito: Se $B \in \mathcal{F}(V)$ e R é uma relação fuzzy então definimos a imagem inversa de B pela relação fuzzy como:

$$R^{-1}(B)(x) = \bigvee_{y \in V} R(x, y) \wedge B(y) \tag{8}$$

Tanto na definição da imagem como na definição da imagem inversa pode ser conveniente trocar a operação de mínimo por uma t-norma.
Composição de relações: