Lista 3 de Cálculo para Funções de Várias Variáveis II
MAT 2352

14 de Setembro de 2015

1 Integração Dupla em Regiões mais gerais

Questão 1. Em cada caso esboçar um desenho da região de integração e calcular o integral duplo.

- $\int\int_R x\cos(x+y)dx\ dy$, onde R é a região triangular cujos vértices são $(0,0)$, $(\pi,0)$ (π,π).
- $\int\int_R (1+x)\sin y\ dx\ dy$, sendo R o trapézio com vértices $(0,0)$, $(1,2)$ $(1,0)$ e $(0,1)$.
- $\int\int_R (x+3y)dx\ dy$, onde R é a região limitada pelo eixo x, a reta $y=2x$ e a reta $y=-x+4$.
- $\int\int_R \frac{1}{x+y}dx\ dy$, onde R é a região limitada pelas retas $y=0$, $x=1$ e $y=x$.
- $\int\int_R e^x e^{2y}dx\ dy$, sendo R é a região limitada pelo quadrado $|x|+|y|=1$
- $\int\int_R \sin(x+y)dx\ dy$, onde R é a região limitada pelas retas $x=0$, $y=3\pi$ e $y=x$
- $\int\int_R (x+y+1)dx\ dy$, sendo R é a região limitada pelas retas $y-x=1$, $y-x=-1$ e $y+x=1$ e $y+x=2$
- $\int\int_R (x+y)dx\ dy$, onde R é a quarta parte, situada no primeiro quadrante, do anel circular limitado pelos círculos $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.
- $\int\int_R (r^2-x^2-y^2)^{1/2}dx\ dy$, onde $R:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq r^2\}$. Interprete geometricamente o resultado obtido.

Questão 2. Uma pirâmide esta limitada pelo três planos coordenados e o plano $x+2y+3z=6$. Fazer um desenho do solido referido e calcular o seu volume por integração dupla.

Questão 3. Falso ou verdadeiro

$$\int_0^1\left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dy\right]\,dx = \int_0^1\left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dx\right]\,dy$$

Questão 4. Calcule o volume do conjunto dado

- $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1, 0\leq z\leq xye^{x^2-y^2}\}$.
- $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1, 0\leq z\leq x+2y\}$

Questão 5. Ao calcular-se, por integração dupla, o volume V do solido situado abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima de uma região S do plano XOY, obteve-se a seguinte soma de integrais repetidos

$$V = \int_0^1 \left[\int_0^y (x^2 + y^2) dx \right] \, dy + \int_1^2 \left[\int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx \right] \, dy$$

Desenhar a região S e exprimir V por integrais repetidos nos quais a ordem de integração esteja invertida. Efectuar, também, a integração e calcular V.

Questão 6. Supomos que o integral duplo de uma função positiva f, estendido a uma região S, se reduz aos integrais repetidos dados. Em cada exercício traçar um esboço de S e permutar a ordem de integração.

- $\int_0^1 [\int_0^y f(x,y) dx] \, dy$
- $\int_0^2 [\int_{y^2}^{2y} f(x,y) dx] \, dy$
- $\int_1^4 [\int_{x^{1/2}}^2 f(x,y) dy] \, dx$
- $\int_0^3 [\int_{4y/3}^{(25-y^2)^{1/2}} f(x,y) dx] \, dy$

Questão 7. Quando por uma integral duplo se calculou o volume V do solido situado sob a superficie $z = f(x,y)$ e acima de uma região S do plano XOY, obteve-se a seguinte soma de integrais repetidos

$$V = \int_1^2 \left[\int_x^{x^3} f(x,y) dy \right] \, dx + \int_2^8 \left[\int_x^8 f(x,y) dy \right] \, dx$$

Desenhar a região S e exprimir V por integrais repetidos nos quais a ordem de integração esteja invertida. Efectuar, também, a integração e calcular V. Alem disso, efectuar a integração e calcular V quando $f(x,y) = e^x (x/y)^{1/2}$

Questão 8. Calcular o volume V do *solido* S dado em cada caso:

1. S é o solido limitado pelo cilindro $z = 5 - 2x^2$, os planos coordenados e o plano $2x + y = 1$;
2. S é o solido limitado pelos planos $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, onde a, b, c sao números positivos;
3. S é o solido limitado pelo o paraboloide hiperbólico $z = xy$, o cilindro $y = (2x)^{1/2}$ e os planos $x + y = 4$, $y = 0$ $z = 0$;

2 Mudança de Coordenadas

Questão 9. Resolva o item 7 da questão 1 por uma mudança apropriada de coordenadas.

Questão 10. Resolva o item 8 da questão 1 por mudança a coordenadas polares.

Questão 11. Calcule as integrais duplas usando uma mudança de coordenadas apropriadas:

1. $\int \int_R e^{\frac{y-x}{y+x}} \, dx \, dy$, onde R é o triângulo limitado pela reta $x + y = 2$ e pelos eixos coordenados;

2. $\int\int_R (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dx\, dy$, sendo R o paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$;

3. $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{y/x+y} dy\, dx$ (ajuda use $x + y = u$, $y = uv$

4. $\int\int_R x^2 y^2 dx\, dy$, sendo R a região limitada pelas hiperbolas $xy = 1$, $xy = 2$ e as retas $y = x/2$, $4y = 3x$;

Questão 12. Seja R a regiao limitada por $x+y = 1$, $x = 0$ e $y = 0$. Prove que $\int\int_R \cos(\frac{x-y}{x+y}) dx\, dy = \frac{\sin 1}{2}$

Questão 13. Calcule a integral da função $f(x, y) = x^{-3}$ na região limitada pelas parabolas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y^2 = x$ e $y^2 = 2x$

- Sem usar mudança de coordenadas obtenha uma expressão para $\int\int_R f(x, y)\, dy\, dx$;
- usando mudança de coordenadas obtenha o valor da integral $\int\int_R f(x, y)\, dy\, dx$

Questão 14. Calcular a integral da função $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ sob a região limitada pelo circulo unitário $x^2 + y^2 = 1$

Questão 15. Calcule a integral da função $f(x, y) = (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})^{1/2}$ sob a regiao R limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Questão 16. Calcule o volume que está entre a semi-esfera $z = (2 - x^2 - y^2)^{1/2}$ e o cone $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$

Questão 17. Calcular o volume abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que esta sob o anel $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

Questão 18. Mudar o integral para coordenadas polares e calcular o seu valor. (A letra a representa uma constate positiva.)

1. $\int_0^a [\int_0^x (x^2 + y^2)^{1/2} dy]\, dx$
2. $\int_0^1 [\int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-1/2} dy]\, dx$
3. $\int_0^a [\int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (x^2 + y^2) dx]\, dy$

Questão 19. Calcule $\int\int_R (y^2 - x^2)^{1/3}\, dx\, dy$ onde R é o paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(1/2, 1/2)$, $(0, 1)$ e $(-1/2, 1/2)$.

Questão 20. A *lemniscata de Bernoulli* é uma curva cuja equação é dada por

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Usando mudança de coordenadas polares obtenha a área que esta curva encierra.

Bibliografia

1. Tom M. Apostol, Cálculo Volume II, Reverte, 1981.
2. Guidorizzi, H.L. Um curso de cálculo (vol 3). LTC, 1987.