Principio Variacional

S.Bonnot

Teorema: Principio Variacional pela entropia

Seja $f: X \to X$ uma aplicação contínua do espaço métrico compacto X.

Seja $\mathcal{M}(f)$ o conjunto das medidas de probabilidade definidas na σ-álgebra de Borel de X, e invariantes por f. Então: $h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f) / \mu \in \mathcal{M}(f)\}$

Proposição: Se $f: X \to X$ é contínua em X espaço métrico compacto, e μ medida de probabilidade definida na σ-álgebra de Borel de X, e invariante por f. Então:

$$\boxed{h_\mu(f) \leq h_{top}(f)}$$

Demonstração:

Seja $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_p\}$ uma partição em conjuntos de Borel. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon . p \log p < 1$. Pelo Teorema de regularidade das medidas (ver apêndice), podemos $\forall i = 1, \dots, p$ achar um compacto $K_i \subset P_i$ com $\mu(P_i - K_i) < \varepsilon$.

Seja agora $K_0 := X - \bigcup_{i=1}^{p} K_i$. Então: $\mu(K_0) \leq p.\varepsilon$, e $\mathcal{K} = \{K_0, K_1, \dots, K_p\}$ define uma partição de X em $p+1$ borelianos.

Agora: $\forall i > 0$, $K_i \cap P_j = \emptyset$ se $j \neq i$, $= K_i$ se $i = j$.

Consequência:

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{K}) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=1}^{p} \mu(K_i) \phi\left(\frac{\mu(K_i \cap P_j)}{\mu(K_i)}\right) = \sum_{j=1}^{p} \mu(K_0) \phi\left(\frac{\mu(K_0 \cap P_j)}{\mu(K_0)}\right) = \mu(K_0) \sum_{j=1}^{p} - \frac{\mu(K_0 \cap P_j)}{\mu(K_0)} \log \frac{\mu(K_0 \cap P_j)}{\mu(K_0)}$$

Concavidade de $\log \Rightarrow H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{K}) \leq \mu(K_0) \log \sum_{j=1}^{p} \frac{\mu(K_0 \cap P_j)}{\mu(K_0)} \cdot \frac{\mu(K_0)}{\mu(K_0 \cap P_j)} \leq p \varepsilon \log p < 1$.

Mas já sabemos que $h(T, Q) \leq h(T, \mathcal{P}) + H(Q|\mathcal{P})$ de maneira geral.

Então: $h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq h_\mu(f, \mathcal{K}) + 1$.

Vamos fabricar uma partição com abertos: $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_p\}$ definidos por:
$U_i := K_0 \cup K_i = X - \bigcup_{j=1, j\neq i} K_j$.

Agora, cada elemento de $\bigvee_{i=0}^{n-1} F^{-i}(\mathcal{U})$ é reunião, no máximo, de 2^n elementos da partição $\bigvee_{i=0}^{n-1} F^{-i}(K)$, porque os U_i são iguais a $K_0 \cup K_i$.

Consequência disso: $H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} F^{-i}(K)\right) \leqslant \log \# \bigvee_{i=0}^{n-1} F^{-i}(K) \leqslant \log 2^n \cdot N_n(F, \mathcal{U})$.

(Recobrir X com $N_n(F,\mathcal{U})$ abertos de $\bigvee_{i=0}^{n-1} F^{-i}(\mathcal{U})$).

Dividindo por n, e tomando o limite quando $n \to +\infty$:

$$h_\mu(F, K) \leqslant h_{top}(F, \mathcal{U}) + \log 2 \leqslant h_{top}(F) + \log 2.$$

Tomando o sup sobre as partições mensuráveis $\mathcal{P}$ temos: $h_\mu(F) \leqslant h_{top}(F) + 1 + \log 2$.

Podemos aplicar o mesmo resultado para F^k e obter:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k h_\mu(F) \leqslant k h_{top}(F) + 1 + \log 2.$$

Dividindo por k, e tomando $k \to +\infty$, temos finalmente:

$$\boxed{h_\mu(F) \leqslant h_{top}(F).}$$

$\square$

Agora, vamos mostrar: $h_{top}(f) \leqslant \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} h_\mu(f)$.

A gente vai precisar de alguns lemas: (com demonstrações no apêndice):

Lema: Seja X um espaço métrico compacto e $(\mu_m)_{m \geqslant 0}$ uma sequência de medidas de Borel de probabilidade, convergindo para μ na topologia fraca*. Então, para todo boreliano A tal que $\mu(\partial A) = 0$ temos:

$$\lim_{m \to +\infty} \mu_m(A) = \mu(A).$$

Lema: Seja X um espaço métrico compacto, e μ uma medida de probabilidade de Borel. Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição em borelianos $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$ tal que para todo $i \in I$ temos:

$$\operatorname{diam}(P_i) \leqslant \varepsilon \quad \text{e} \quad \mu(\partial P_i) = 0.$$

Lema: $\forall \varepsilon > 0$, existe $\mu \in \mathcal{M}(f)$ tal que:

$$h_\mu(f) \geqslant \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln(s(n, \varepsilon))$$

Supondo esses lemas: fim da demonstração do teorema:

Temos $\underbrace{\sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} h_\mu(f)}_{\text{independente de } \varepsilon} \geqslant h_\mu(f) \geqslant \limsup \frac{1}{n} \ln(s(n, \varepsilon))$

Podemos tomar agora o $\lim_{\varepsilon \to 0^+}$ e obter $\sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} h_\mu(f) \geqslant h_{top}(f)$

Fim. Teor $\square$

Demonstração do ultimo lema:

$\forall n \geq 1$, vamos escolher um conjunto (n,ε)-separado S_n de cardinal $s(n,\varepsilon)$.

Vamos definir: $\nu_n = \frac{1}{s(n,\varepsilon)} \sum_{x \in S_n} \delta_x$ e $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i(\nu_n)$.

Podemos extrair $(n_k)_{k \geq 0}$ tal que, no mesmo tempo:

$$\lim_k \frac{1}{n_k} \ln(s(n_k,\varepsilon)) = \limsup_n \frac{1}{n} \ln(s(n,\varepsilon)), \quad \text{e} \quad (\mu_{n_k}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mu \quad (\text{fraca}^*).$$

(o segundo ponto utiliza a compacidade de $\mathcal{M}(f)$: ver apêndice)

Observação: este limite μ é invariante.

Demo.: $\forall g : X \to \mathbb{R}$, contínua, $\int (g \circ f - g)\, d\mu = \lim_k \int (g \circ f - g)\, d\mu_{n_k}$

$$= \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \int (g \circ f) \circ f^i \, d\nu_k - \frac{1}{n_k} \sum_{k=0}^{n_k-1} \int g \circ f^i \, d\nu_k = \lim_k \frac{1}{n_k} \int (g \circ f^{n_k} - g)\, d\nu_k = 0$$

porque $\left| \int (g \circ f^{n_k} - g)\, d\nu_k \right| \leq 2 \max_{x \in X} |g(x)|$.

Vamos mostrar que essa μ funciona:

Seja $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$ uma partição em borelianos tal que: $\operatorname{diam}(P_i) \leq \varepsilon$ e $\mu(\partial P_i) = 0 \; \forall i$.

Objetivo: mostrar $h_\mu(f,\mathcal{P}) \geq \limsup_n \frac{1}{n} \ln(s(n,\varepsilon))$. (lembra: $h_\mu(f) \geq h_\mu(f,\mathcal{P})$).

Seja $(\mathcal{P}^n)_{n \geq 1}$, a sequência definida por: $\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P})$.

S_n é (n,ε)-separado então cada elemento de $\mathcal{P}^n$ contem no máximo um ponto de S_n.

Consequência: $H_{\nu_n}(\mathcal{P}^n) = \ln s(n,\varepsilon)$ (se $P_i \not\ni$ ponto de S_n, a contribuição é zero
se $P_i \ni$ " " ", a contribuição é $\frac{1}{\# S_n} \cdot \ln \# S_n$)

Lema crucial: para toda partição em borelianos $\mathcal{Q}=(Q_j)_{j\in J}$ e todos $q\leqslant n$,

$$q\, H_{\nu_n}(\mathcal{Q}^n) \leqslant n\, H_{\mu_n}(\mathcal{Q}^q) + 2q^2 \ln(\# J), \quad \text{onde } \mathcal{Q}^m = \bigvee_{i=0}^{m-1} f^{-i}(\mathcal{Q}).$$

Demo.: Seja $q\geqslant 1$. $\forall r<q$ temos:

$$\mathcal{Q}^n = \left(\bigvee_{j=0}^{j_r-1} f^{-jq-r}(\mathcal{Q}^q)\right) \vee \left(\bigvee_{i=0}^{r-1} f^{-i}(\mathcal{Q})\right) \vee \left(\bigvee_{i=qj_r+r}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{Q})\right)$$

onde j_r é definido por: $n-1-q < r + qj_r - 1 \leqslant n-1$.

Consequência:

$$H_{\nu_n}(\mathcal{Q}^n) \leqslant \sum_{j=0}^{j_r-1} H_{\nu_n}\left(f^{-jq-r}(\mathcal{Q}^q)\right) + \sum_{i=0}^{r-1} H_{\nu_n}(f^{-i}(\mathcal{Q})) + \sum_{i=qj_r+r}^{n-1} H_{\nu_n}(f^{-i}(\mathcal{Q}))$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{j_r-1} H_{\nu_n}\left(f^{-jq-r}(\mathcal{Q}^q)\right) + 2q \ln(\# J).$$

Agora, podemos tomar a soma sobre r:

$$q\, H_{\nu_n}(\mathcal{Q}^n) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} H_{\nu_n}(f^{-i}(\mathcal{Q}^q)) + 2q^2 \ln(\# J).$$

Mas: $\forall$ partição em borelianos $\mathcal{S}=(S_k)_{k\in K}$, temos pela concavidade de ϕ:

$$H_{\mu_n}(\mathcal{S}) = \sum_k \phi(\mu_n(S_k)) = \sum_k \phi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_*^i(\nu_n)(S_k)\right) \geqslant \sum_k \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \phi(f_*^i(\nu_n)(S_k))$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} H_{f_*^i \nu_n}(\mathcal{S})$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} H_{\nu_n}(f^{-i}(\mathcal{S})).$$

Fim lema $\square$

Aplicação do lema crucial para $\mathcal{P}^{n_k}$: (e dividindo por $q n_k$):

$$\frac{1}{n_k}\ln(s(n_k,\varepsilon)) = \frac{1}{n_k}H_{\nu_{n_k}}(\mathcal{P}^{n_k}) \leq \frac{1}{q}H_{\mu_{n_k}}(\mathcal{P}^{q}) + \frac{2q}{n_k}\ln(\# I).$$

Mas a fronteira de cada elemento de $\mathcal{P}^q$ tem medida nula, então com $k \to +\infty$:

$$\limsup \frac{1}{n}\ln(s(n,\varepsilon)) \leq \frac{1}{q}H_{\mu}(\mathcal{P}^{q})$$

Tomando o limite com $q \to +\infty$:

$$\limsup \frac{1}{n}\ln(s(n,\varepsilon)) \leq h_\mu(f,\mathcal{P}) \leq h_\mu(f).$$

fim Teorema $\square$

Apêndice

Lema de regularidade: uma medida de Borel de probabilidade num espaço métrico compacto é regular : i.e $\forall$ boreliano A, $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ fechado F um aberto U tais que: $F \subset A \subset U$ e $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.

Demo.:

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos borelianos satisfazendo as hipoteses do lema:

1) $\mathcal{C}$ invariante por complementar

2) $\mathcal{C}$ estável por reunião enumerável: dada A_m, achar $F_m \subset A_m \subset U_m$

com $\mu(U_m \setminus F_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$. $\Rightarrow \bigcup_m F_m \subset \bigcup_m A_m \subset \bigcup_m U_m$,

mas $\mu\left(\bigcup U_m - \bigcup F_m\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_m U_m - F_m\right) \leqslant \sum_{m=0}^{+\infty} \mu(U_m \setminus F_m) < \varepsilon$.

Consequência: $\exists m_0 \geqslant 0$ tal que: $\mu\left(\bigcup_{m \geqslant 0} U_m - \underbrace{\bigcup_{0 \leq m \leq m_0} F_m}_{\text{Fechado}}\right) < \varepsilon. \Rightarrow \bigcup_m A_m \in \mathcal{C}$

3) $\mathcal{C}$ contem os fechados: F Fechado $= \bigcap_{m \geqslant 1} U_m$, com $U_m = \{x \in X \mid d(x,F) < \frac{1}{m}\}$

Assim $\lim_m \mu(U_m \setminus F) = \mu\left(\bigcap_m U_m \setminus F\right) = 0$.

Lema: Seja X um espaço métrico compacto e $(\nu_m)_{m\geq 0}$ uma sequência de medidas de Borel de probabilidade, convergindo para ν na topologia fraca*. Então, para todo boreliano A tal que $\nu(\partial A)=0$ temos:

$$\lim_{m\to+\infty} \nu_m(A)=\nu(A).$$

Demo.:

Vamos definir uma sequência $(f_k)_{k\geq 1}$ de funções contínuas em X por:

$$f_k : x \mapsto \max(1-k\, d(x,A), 0).$$

$(f_k)_{k\geq 1} \searrow$ e converge para $\chi_{\bar{A}}$. $\forall k\geq 1$ temos:

$$\limsup_m \nu_m(A) \leq \limsup_m \int f_k \, d\nu_m = \lim_m \int f_k \, d\nu_m = \int f_k \, d\nu. \quad \left(\text{porque } \int \chi_A \, d\nu_m \leq \int f_k \, d\nu_m\right).$$

$$\Rightarrow \limsup_m \nu(A_m) \leq \inf_k \int f_k \, d\nu = \lim_k \int f_k \, d\nu = \nu(\bar{A}) \quad (\text{conv. monótona}).$$

Podemos fazer o mesmo para CA e achar: $\liminf_m \nu_m(A) \geq \nu(\mathrm{Int}(A))$.

Mas é o fim porque: $\nu(\bar{A})=\nu(\mathrm{Int}(A))$. □

Lema: Seja X um espaço métrico compacto, e μ uma medida de probabilidade de Borel. Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição em borelianos $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$ tal que para todo $i \in I$ temos:

$$\operatorname{diam}(P_i) \leqslant \varepsilon \quad \text{e} \quad \mu(\partial P_i) = 0.$$

Demo:

$\forall x \in X$, $\exists\, \varepsilon_x \in (0, \varepsilon/2)$ tal que $\mu(\{x' \in X \mid d(x, x') = \varepsilon_x\}) = 0$

(porque $(0, \varepsilon/2)$ não é enumerável).

Isso implica: $\mu(\partial B(x, \varepsilon_x)) = 0$. Seja $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, uma sub-cobertura finita da cobertura $B(x, \varepsilon_x)_{x \in X}$, podemos definir uma partição mensurável $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ por:

$$P_i = U_i \setminus \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i} U_j.$$

Agora $\operatorname{diam}(P_i) \leqslant \varepsilon$, e $\partial(P_i) \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \partial U_i$ de medida nula. $\square$

Teorema de compacidade de $\mathcal{M}(X)$:

Seja X um espaço métrico compacto, então $\mathcal{M}(X)$ o conjunto das medidas de Borel, de probabilidade é compacto pela topologia fraca.

Demo: lembra que a topologia fraca em $\mathcal{M}(X)$ é a menor topologia

tal que $\forall F \in C^0(X, \mathbb{R})$, $\mu \mapsto \int F \, d\mu = \mu(f)$ seja contínua.

Seja μ_n e (φ_i) densa em $C^0(X, \mathbb{R})$. Temos: $\int \varphi_i \, d\mu_n \in [-\|\varphi_i\|_\infty, \|\varphi_i\|_\infty]$. Por extração diagonal,

podemos supor que $\lim_n \int \varphi_i \, d\mu_n$ existe, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Mas então $\theta(\varphi) = \lim_n \int \varphi \, d\mu_n$ existe $\forall \varphi \in C^0(X, \mathbb{R})$. Claramente: $\theta(1) = 1$, $\theta(\varphi) \geq 0$ se $\varphi \geq 0$.

Pelo teorema de Riesz, existe $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\theta(\varphi) = \int \varphi \, d\mu$, e este μ é limite dos μ_n na topologia fraca.

Lembra: Teorema de Riesz:

Seja X espaço métrico compacto, e $\theta: C^0(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ uma forma linear positiva (i.e $\theta(\varphi) \geq 0$, $\forall \varphi \geq 0$). Então existe uma única medida μ definida nos borelianos de X tal que:

$$\theta(\varphi) = \int \varphi \, d\mu.$$

$\square$