$1^{\underline{a}}$ Questão: (2,5 pontos) Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

a) Encontre as assíntotas.

b) Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.

c) Encontre os valores máximos e mínimos locais.

d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

e) Esboce o gráfico de f.

$D_f =]-1;+\infty[$

ⓐ Assíntotas horizontais: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x}} = +\infty$, então não temos assíntotas horizontais.

Assíntotas verticais: f é contínua em D_f então não tem no domínio de f, mas $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ então $x=-1$ é assíntota vertical.

ⓑ $f'(x) = \left(2x\cdot\sqrt{x+1} - x^2\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\cdot\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2(x+1)^{3/2}}\left(4x\cdot(x+1)-x^2\right) = \dfrac{x(3x+4)}{2(x+1)^{3/2}}$.

Agora: o sinal de f' é o sinal de $x(3x+4)$ no intervalo $]-1;+\infty[$.

Mas $x\cdot(3x+4) > 0 \iff (x>0$ ou $x<-\frac{4}{3})$. No intervalo $]-1;+\infty[$, só tem a solução $x>0$.

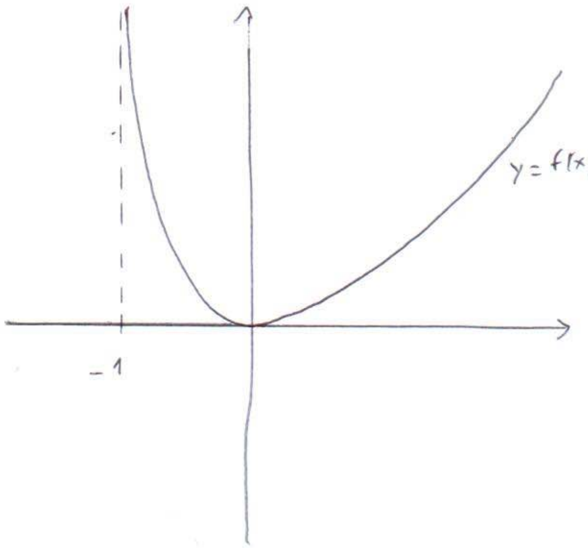
Conclusão: $f'>0 \iff x>0$ i.e f é decrescente em $]-1;0[$ e crescente em $]0;+\infty[$.

ⓒ $\left.\begin{array}{l} f \text{ decrescente em }]-1;0[\Rightarrow f(x)\geq f(0)\ \forall x\in]-1;0[\\ f \text{ crescente em }]0;+\infty[\Rightarrow f(x)\geq f(0)\ \forall x\in]0;+\infty[\end{array}\right\} \Rightarrow$ f tem um único extremo local (que é mín. global) em $x=0$, com valor $f(0)=0$.

ⓓ $f''(x) = \dfrac{(6x+4)\cdot 2(x+1)^{3/2} - (3x^2+4x)\cdot 3(x+1)^{1/2}}{4(x+1)^3} = \dfrac{2(6x+4)(x+1) - 3(3x^2+4x)}{4(x+1)^{5/2}} = \dfrac{3x^2+8x+8}{4(x+1)^{5/2}}$.

Discriminante $\Delta = 8^2-4(3)(8) = -32 < 0 \Rightarrow f''>0$ em $D_f \Rightarrow f$ concâva para cima em $]-1;+\infty[$.
(i.e não temos pontos de inflexão).

ⓔ



$2^{\underline{a}}$ **Questão:** (2,5 pontos) Uma partícula se desloca sobre o eixo horizontal com posição $x = x(t)$, $t \geq 0$. Determine $x(t)$ sabendo que

$$x''(t) = \cos(2t), \text{ com } x'(0) = 1 \text{ e também } x(0) = 0.$$

Temos $x'(t) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2t) + C$, mas $1 = x'(0) = \frac{1}{2}\underbrace{\text{sen}\,(0)}_{=0} + C \Rightarrow C = 1$

então $x'(t) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2t) + 1$.

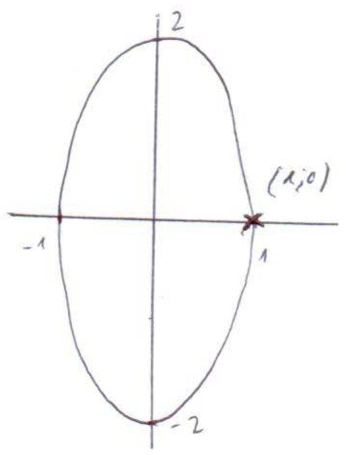
Por isso:

$x(t) = -\frac{1}{4}\cos(2t) + t + D$, mas $0 = x(0) = -\frac{1}{4}\cos(0) + 0 + D \Rightarrow D = \frac{1}{4}$.

Conclusão:

$x(t) = t - \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}$.

$3^{\underline{a}}$ Questão: (2,5 pontos) Encontre os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto $(1, 0)$.



Seja d = distância $\left((x;y),(1;0)\right) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}$.

Então $d^2 = (x-1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + 4 - 4x^2 = -3x^2 - 2x + 5$.

Queremos maximizar $f(x) = -3x^2 - 2x + 5$ no intervalo $[-1;1]$:

a) $f(-1) = 2$ e $f(1) = 0$.

b) núm. críticos: $f'(x) = -6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

Agora $f(-\frac{1}{3}) = -3(-\frac{1}{3})^2 - 2(-\frac{1}{3}) + 5 = \frac{16}{3}$

Conclusão: $\frac{16}{3} > 2$ então a maior distância é obtida para $x = -\frac{1}{3}$.

Temos 2 pontos na elipse: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ e $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$.

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** (2,5 pontos) Mostre que para todo $x > 0$ temos:

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq (x^2/2)e^x$$

F. de Taylor, ordem 1, em 0, com resto de Lagrange:

$$e^x = 1 + x + e^s \cdot \frac{x^2}{2} \quad \text{com} \quad s \in (0, x).$$

Agora $e^s \cdot \frac{x^2}{2} > 0 \Rightarrow e^x - (1+x) > 0$

e $s < x \Rightarrow e^s < e^x \Rightarrow e^x - (1+x) = \frac{x^2}{2} e^s < \frac{x^2}{2} \cdot e^x$.