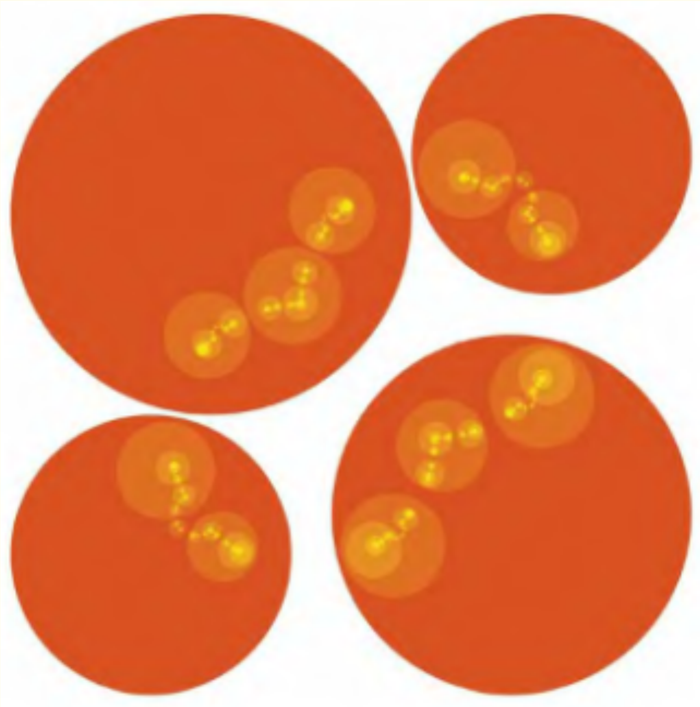
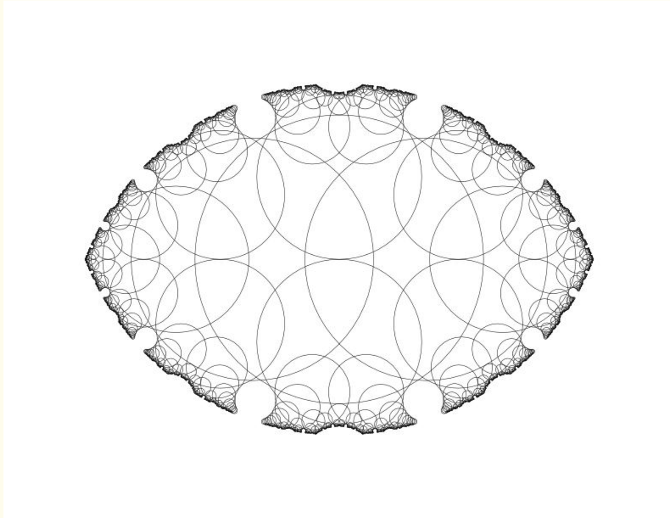
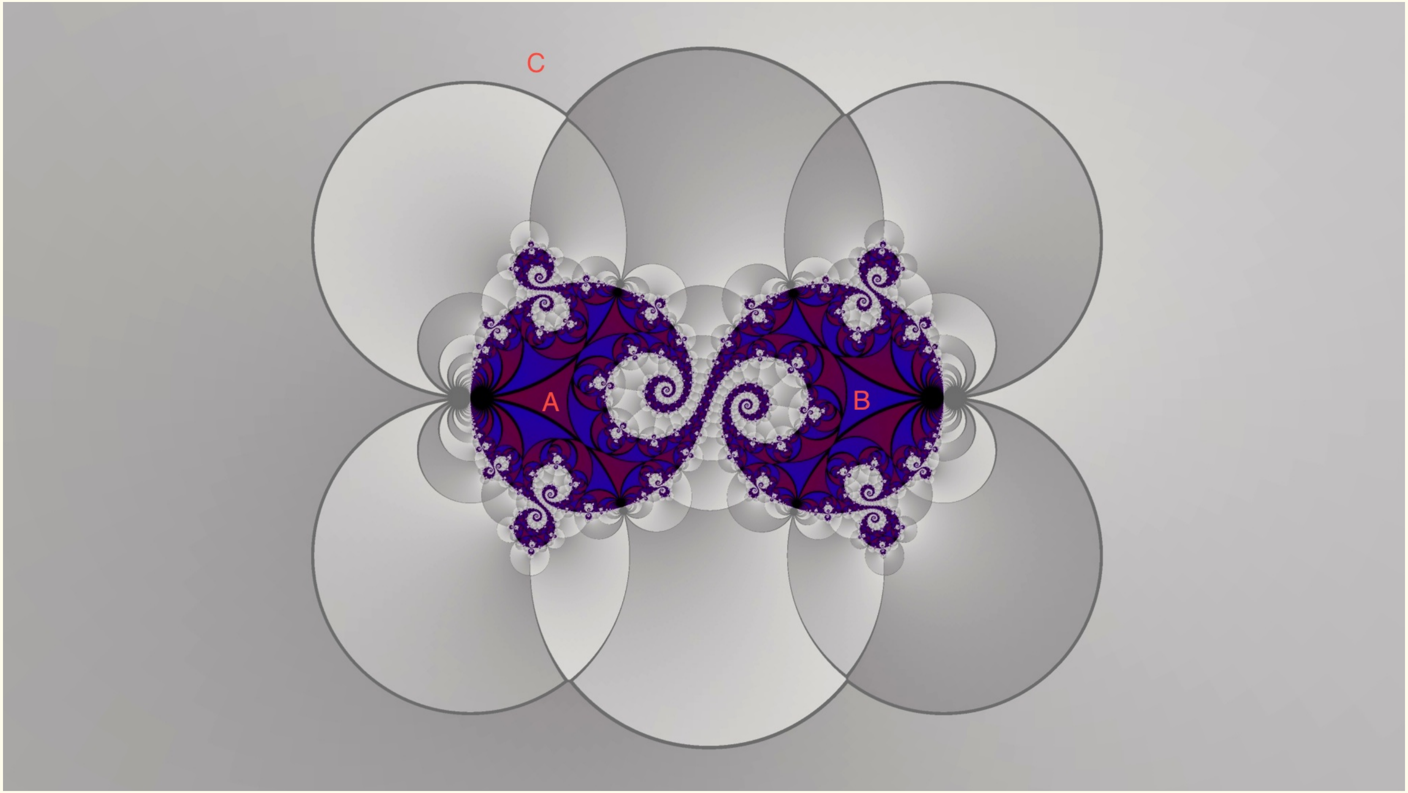
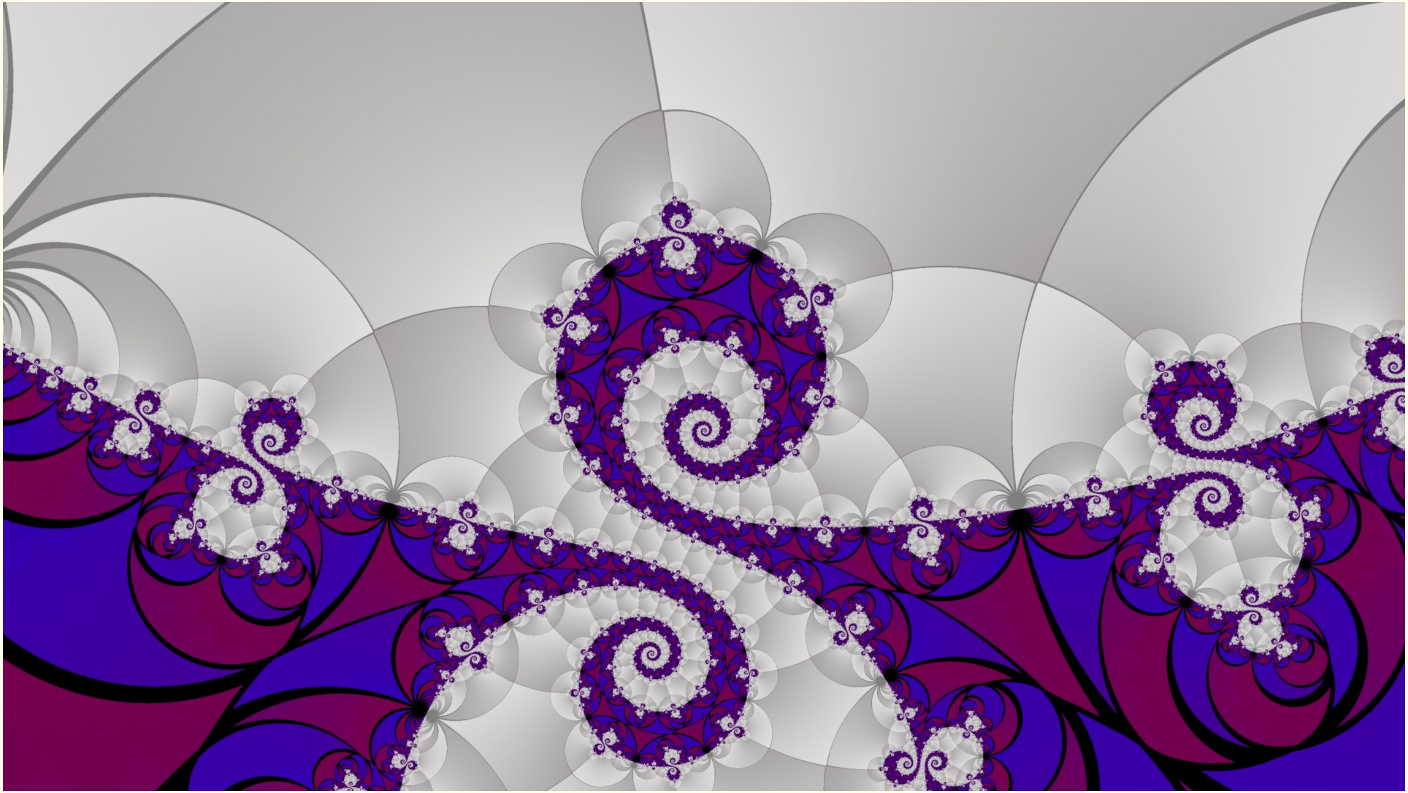
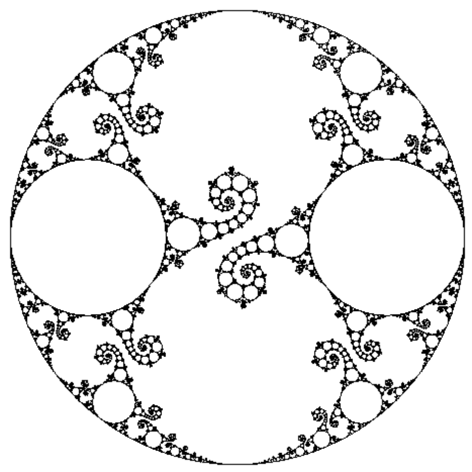
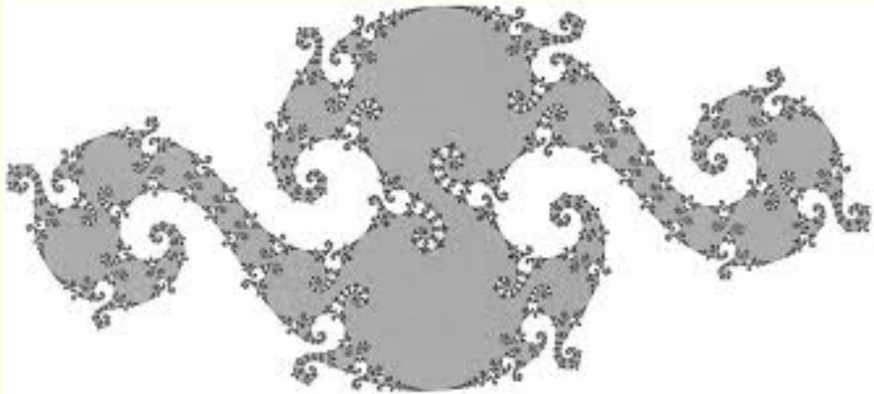
# Examplos: conjuntos limites

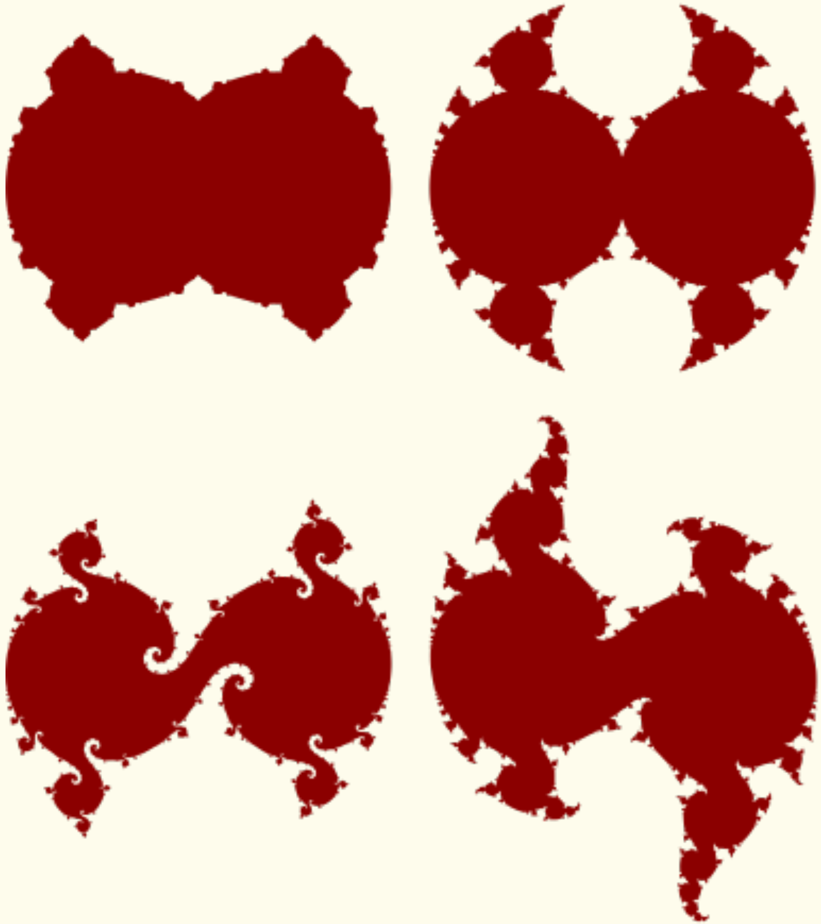


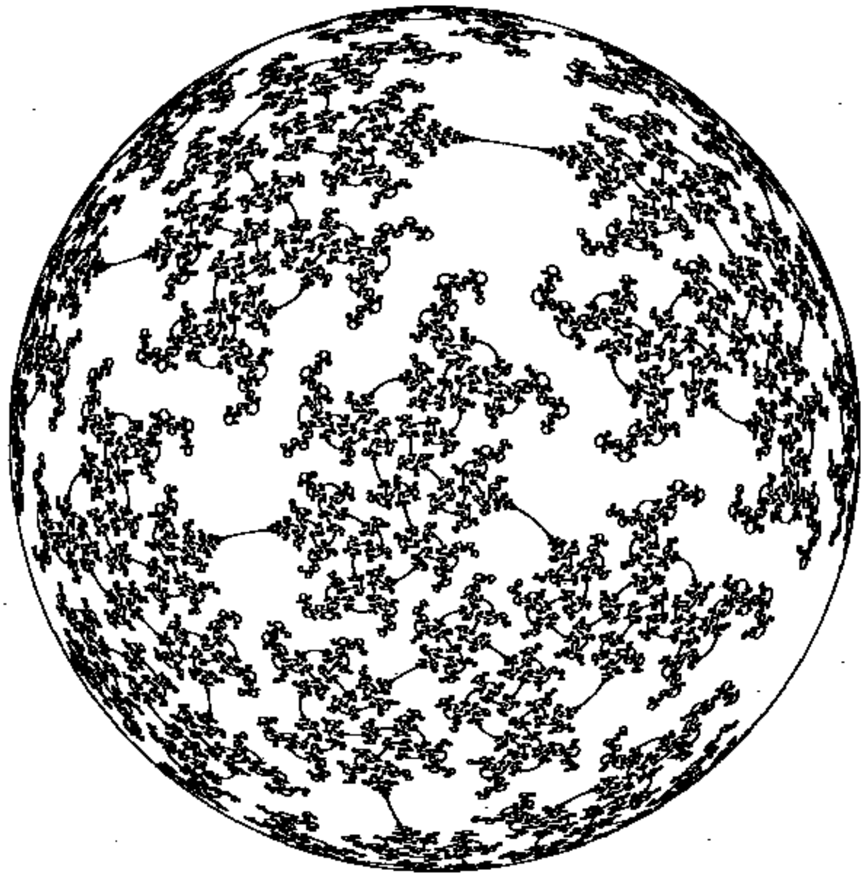



C
A
B







# Quase-isometrias e extensões

* Isometrias:
Sejam $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ espaços metricos,

$$h : X \longrightarrow Y \text{ isometria} \iff d_Y(h(x_1), h(x_2)) = d_X(x_1, x_2), \ \forall x_1, x_2 \in X.$$

* Observação:

$h$ isometria de $\mathbb{H}^3 \Longrightarrow h$ tem uma extensão continua
$\bar{h} : \partial \mathbb{H}^3 \longrightarrow \partial \mathbb{H}^3$ ($\bar{h}$ homeo, conformal)

---

**Teorema:**
Cada quase-isometria $h : \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ tem uma extensão continua $\bar{h} : \overline{\mathbb{H}^3} \longrightarrow \overline{\mathbb{H}^3}$, e a restrição $\bar{h} : \partial \mathbb{H}^3 \longrightarrow \partial \mathbb{H}^3$ é quasi-conformal.

Definição: Quase-isometria = "quase sobrejetiva
+
mergulho quase-isometrico"

**Def.**: $f: X \to Y$ é quase-sobrejetiva $\iff \exists C < \infty / \forall y \in Y, \exists x \in X$, tal que $d(y, f(x)) \leqslant C$.

---

**Def.**: $f: X \to Y$ é um "mergulho quase-isometrico" se e somente se:

$\exists C, C' \in \mathbb{R}$ tais que $\boxed{\frac{1}{C} d_X(x_1, x_2) - C' \leqslant d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C d_X(x_1, x_2) + C'}$,

para todos $x_1, x_2 \in X$.

---

**Exemplos**: (1) Cada espaço metrico compacto $X$ é quase-isometrico á $\{pt\}$.

(2) $\mathbb{Z}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma quase-isometria

(3) Quase-isometria é uma relação de equivalencia.

(4) $\exists C, C'$ (universais) tais que: para cada espaço metrico $X$, tem uma $(C, C')$-quase-isometria á um grafo metrico, com arestas de comprimento 1

(5) $S^1 \times \mathbb{R} \underset{q.i}{\simeq} \mathbb{R}$

Def. "Quase-geodesica" é um $(C,C')$-quase isometrico mergulho $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^3$.

"Um Raio $(C,C')$-quase-geodesico : mesmo, mas com $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{H}^3$.

---

"Gromov-Hausdorff topologia" (também chamada "topologia geometrica")

Seja $(X_n, x_n)$ uma sequencia de espaços métricos completos (com pontos básicos $x_n$):

$(X_n, x_n)$ tem um limite $(X, x)$ na topologia de Gromov-Hausdorff se e somente se:

$\forall \varepsilon > 0, R > 0, \exists n_0 < \infty$ tal que: $\forall n > n_0$, existe uma $(1+\frac{1}{n}, \varepsilon)$-quase isometria

$f_n : B_R(x_n) \longrightarrow B_R(x)$.

"maiores e maiores bolas são cada vez mais semelhantes."

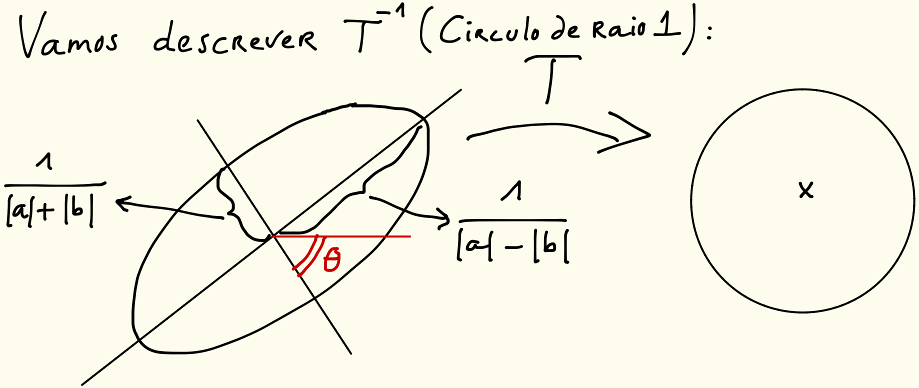
Def.: "quase-conformal":

Preparação: applicações lineares em $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, pode ser escrita como $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $u \mapsto au + b\bar{u}$

exercicio: mostrar $\det T = |a|^2 - |b|^2$.

Vamos descrever $T^{-1}$(Circulo de Raio 1):




$T(u) = au + b\bar{u}$,

$a = |a| e^{i\alpha}$

$b = |b| e^{i\beta}$

$\theta = \frac{\beta - \alpha}{2}$

Aqui, suponhamos $\det T > 0$

Quociente $\dfrac{\text{"maior eixo"}}{\text{"menor eixo"}} = \dfrac{|a|+|b|}{|a|-|b|} = \dfrac{1 + \left|\frac{b}{a}\right|}{1 - \frac{|b|}{|a|}}$.

Caso $F: U \to V$, $C^1$:

podemos definir $\frac{\partial F}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ e $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z} + i \frac{\partial F}{\partial y}\right)$,

assim: $[DF(z_0)](u) = \frac{\partial F}{\partial z}(z_0) u + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z_0) \bar{u}$

$$\boxed{\text{"K-quase conformal"} \iff \frac{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\right|}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| - \left|\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\right|} \leq K}$$

**Def. geral:**

Seja $U, V$ abertos de $\mathbb{C}$, $K \geqslant 1$, podemos definir $k := \frac{K-1}{K+1}$ (tal que $0 \leqslant k < 1$).

Uma applicação $f: U \to V$ é **K-quase conformal** se:

1) $f$ é um homeomorfismo
2) $f$ tem "derivadas generalizadas" localmente em $L^2$ tais que:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right| \leqslant k \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|.$$

"derivadas generalizadas" = "derivadas distribuçonais":

* distribução em $\mathbb{R}^n$ = $T$ linear, de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ até $\mathbb{R}$. (exemplo: $\delta(\varphi) := \varphi(0)$)

* "$\frac{\partial T}{\partial x_i}$" é a distribução tal que $\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
  exemplo: $\delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0)$.

Proposição (Ahlfors): "1-quase conformal" $\Leftrightarrow$ biholomorfo.

**Teorema (Ahlfors-Bers):** Seja $\mu$ uma função em $L^\infty(\mathbb{C})$ tal que $\|\mu\|_\infty < 1$, então existe uma unica $f: U \to \mathbb{C}$ quaseconformal que satisfaz $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu \cdot \frac{\partial f}{\partial z}$, e tal que $f$ fixa $0, 1, \infty$.

# Applicação: "Representação quase fuchsiana":

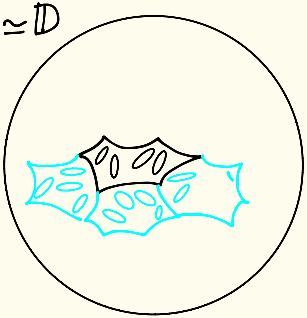
Seja $\Gamma$ um grupo:

um morfismo $\rho: \Gamma \to \mathrm{Aut}\, \mathbb{P}^1 = \text{Möbius}(\hat{\mathbb{C}})$ é chamado "representação de $\Gamma$ em $\mathrm{Aut}\, \mathbb{P}^1$"

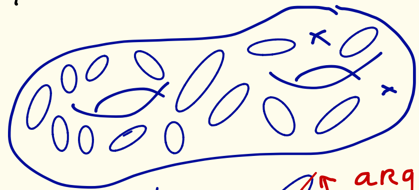
Agora, seja $X$ uma superficie hiperbolica (i.e $X \simeq \mathbb{H}^2/\Gamma$).

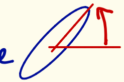
Seja $X^* \simeq \mathbb{H}^*/\Gamma$, e $\mu_1$ "Forma de Beltrami" em $X$

$\mathbb{H} \simeq \mathbb{D}$



podemos definir $\tilde{\mu}_1$ em $\mathbb{H}$, que é $\Gamma$-invariante



angulo de  $\frac{\arg \mu(z)}{2}$

excentricidade $K = \dfrac{1+|\mu|}{1-|\mu|}$.

Então, $\forall\, (\mu_1,\mu_2) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X^*)$, posso definir $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ por $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1$ em $\mathbb{H}$, $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_2$ em $\mathbb{H}^*$, $\tilde{\mu} = 0$ no circulo $S^1 = \partial\mathbb{H} = \partial\mathbb{H}^*$.

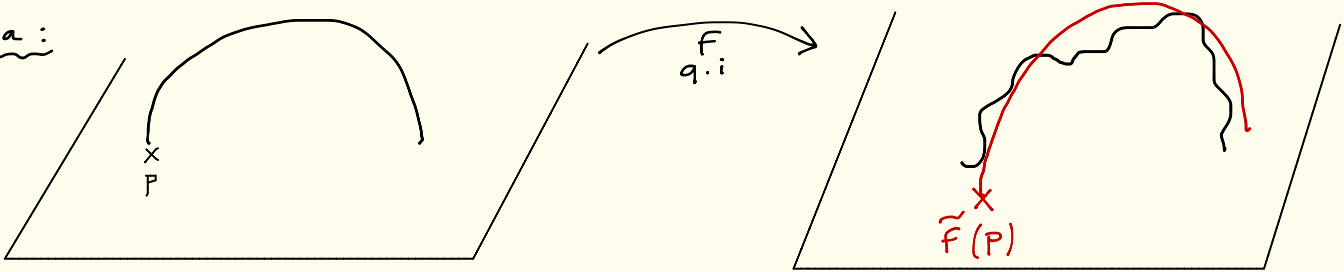
Ahlfors-Bers $\Rightarrow \exists\, F^{\tilde{\mu}}: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ quase conformal

Def: $\widetilde{QF}: \mathcal{M}(X \sqcup X^*) \to \mathrm{Rep}(\Gamma)$ dado por $\widetilde{QF}(\mu_1,\mu_2)(\gamma) := F^{\tilde{\mu}} \circ \gamma \circ (F^{\tilde{\mu}})^{-1}$

$\widetilde{QF}(\mu_1,\mu_2)$ é chamada representação quase fuchsiana, e $\widetilde{QF}(\mu_1,\mu_2)(\Gamma)$ é um grupo quase fuchsiano.

# Demonstração de : "Quase isometrias de $\mathbb{H}^3$ têm extensões quaseconformais"

Idéia :




Quasegeodesicas :

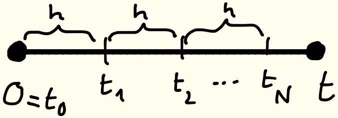
$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^3$ que é um mergulho $(C, C')$ quaseisometrico.

**Lema : "$(k,c)$ quasegeodesica fica numa distancia limitada de uma geodesica"**

Existe uma função $\tau(k,c)$ tal que : para cada $(k,c)$-quasegeodesica $f : [0,t] \longrightarrow \mathbb{H}^3$ temos : $d_H\Big(f([0,t]), [f(0), f(t)]\Big) \leqslant \tau(k,c)$, onde $k > 1$, $c > 1$.

Demonstração :

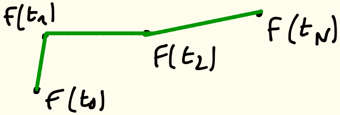
Seja $\gamma \subset \mathbb{H}^3$ a geodesica $f(0)$ $f(t)$. Vamos trocar $\gamma$ por uma curva $\varphi$ feita de pedaços de geodesica :




$h = 2kc$. Seja $D := 2kh$

Podemos ver que: $D > 1 > \log\left(\frac{4k}{h}\right) = \log\left(\frac{2}{c}\right)$.

Depois:




isto é: vamos escolher $\begin{cases} \varphi : [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{H}^3 \text{ \underline{geodesica}} \\ \varphi(t_i) = F(t_i) \\ \varphi(t_{i+1}) = F(t_{i+1}) \end{cases}$

<u>Observação:</u> a distância entre $f$ e $\varphi$ é $\leq k.h + c \Longrightarrow$ vamos mostrar o lema para $\varphi$.

Seja $x_i := \varphi(t_i)$. Então $d(x_i, x_{i+1}) \leq kh + c \leq 2kh$.

Seja $\alpha_{ij}$ a curva $\varphi([t_i, t_j])$, $i<j$: então $\ell(\alpha) = \sum_{s=i}^{j-1} d(x_s, x_{s+1}) \leq 2k|t_j - t_i|$.

Agora $f$ é uma $(k,c)$-quasegeodesica:

$$\Longrightarrow |t_j - t_i| \leq kc + k\, d(x_i, x_j), \text{ também: } d(x_i, x_j) \geq \frac{h}{k} \cdot |j-i| - c \geq \frac{h\,|j-i|}{2k}.$$

Também: $\ell(\alpha_{ij}) \leq 2kh\,|j-i|$.

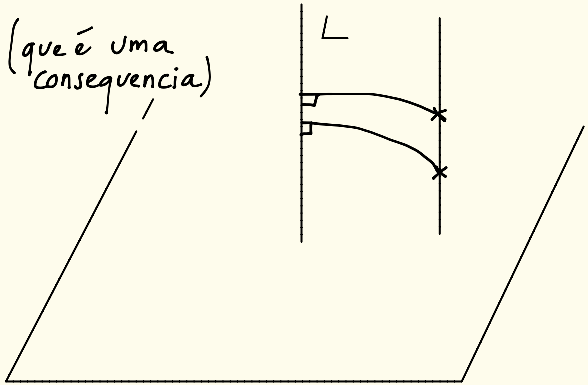
Projeção: $\text{proj}_\gamma : \mathbb{H}^3 \to \gamma$ (onde $x \in \mathbb{H}^3 \mapsto y \in \gamma$, mais proximo de $x$.)

**Lema:**

Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}^3$ uma curva $C^1$, seja $s$ a distância do conjunto $\gamma([a,b])$ até a geodesica $L \subset \mathbb{H}^3$, e $\rho : \mathbb{H}^3 \to L$ a projeção $\text{proj}_\gamma$:

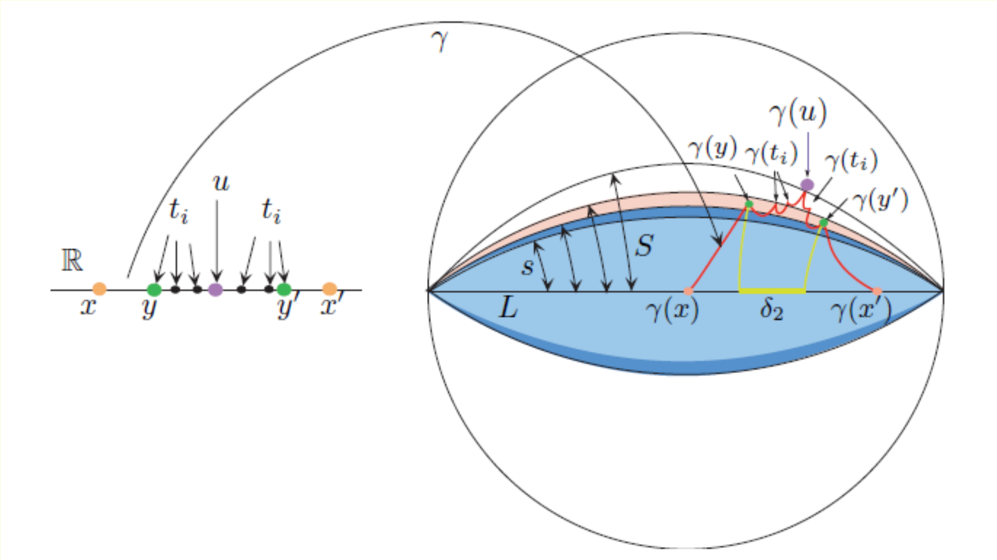
então $|\rho\gamma| \leq (\cosh s)^{-1} \cdot |\gamma|$

**Dem:** vamos admitir este lema, e o seguinte (que é uma consequencia)




**Lema:**
Seja $\alpha_{ij}$ uma curva feita de $m$ segmentos geodesicos, e tal que $\alpha_{ij}(0) := x_i$, $\alpha_{ij}(1) = x_j$ são tais que $d(\alpha_{ij}, \gamma) \geq D$, mas $\begin{cases} d(x_i, \gamma) \leq 2D \\ d(x_j, \gamma) \leq 2D \end{cases}$

Então $\ell(\text{proj}_\gamma(\alpha_{ij})) \leq e^{-D} \cdot m$




# Quase-geodesica

Que acontece entre $y_{x_i}$ e $y'_{x_j}$ ?

Desigualdade triangular:

$$d(x_i,x_j)$$
$$\leq d(\text{proj}(x_i),\text{proj}(x_j)) + 4D$$
$$\leq e^{-D}.m + 4D.$$

Agora, lembra que: $d(x_i,x_j)\geq h\frac{|j-i|}{2K}$, então: $\frac{hm}{2K} \leq e^{-D}.m + 4D$

$$\Longrightarrow m.\left(\frac{h}{2K}-e^{-D}\right)\leq 4D$$

lembra também que $D>\log\left(\frac{2}{c}\right) \Longrightarrow e^{-D}<\frac{c}{2} \overset{2Kc=h}{\Longrightarrow} \frac{h}{4K}>e^{-D}$

$$\Longrightarrow \frac{h}{4K}<\frac{h}{2K}-e^{-D}$$

Consequencia: $m\leq \frac{16DK}{h} \overset{32K^2}{=}$ e $\boxed{\ell(\alpha_{ij})\leq 2Khm \leq 2Kh.32K^2 = 2^7.K^4c}$.

Finalmente: a curva $\alpha_{ij} \subset$ Vizinhança de $\gamma$ de distânça $\underset{\substack{\shortparallel \\ 4k^2 c}}{2D} + 2^7 \cdot k^4 \cdot c$

Como $d(f,\varphi) \leqslant kh + c$, temos que Imagem$(f) \subset$ Vizin.$_{\tau(k,c)}(\gamma)$, $\tau_{(k,c)} = 2^8 k^4 c$.

---

**Teorema:**

① Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^3$ uma $(k,c)$-q.geodesica. Então $\exists!\, L \subset \mathbb{H}^3$ tal que:

$\forall t \in [0,\infty)$ temos $d(\gamma(t), L) \leqslant \tau(k,c)$.

② Seja $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{H}^3$ um raio q.-geodesico. Então $q = \lim_{t\to\infty} \gamma(t)$ existe em $\overline{\mathbb{H}^3}$,

e $d(\gamma[0,\infty), L) \leqslant \tau$, onde $L$ é a reta definida por $\gamma(0)$ e $q$.

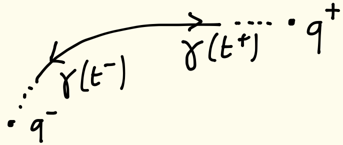
Dem.: ② Seja $\begin{cases} t_i \to \infty \\ t'_i \to \infty \end{cases}$, tais que $\begin{cases} \gamma(t_i) \to q \\ \gamma(t'_i) \to q' \end{cases}$

No caso $q \neq q'$, então $\exists$ sequencias $t_j < t'_j$ tais que,

se $L := (\gamma(0), \gamma(t'_j))$, então $d(\gamma(t_j), L) > \tau$ (impossivel).

<u>Consequencia</u>: $\begin{cases} q := \lim_{t\to\infty} \gamma(t) \text{ existe em } \overline{\mathbb{H}^3} \\ \text{Se } L : \text{Reta}(\gamma(0), q), \text{ então } \forall t \in [0,\infty), \ d(\gamma(t), L) \leq \tau. \end{cases}$

<u>Dem. de ①</u>: mesmo:




---

<u>Dem. : extensões das quase-isometrias :</u>

Seja $h : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ uma q.i , seja $p \in \mathbb{H}^3$.

$\forall q \in \partial\mathbb{H}^3$, $\gamma_{p,q} : [0,\infty)$ é o Raio de geodesica de $p$ até $q$.

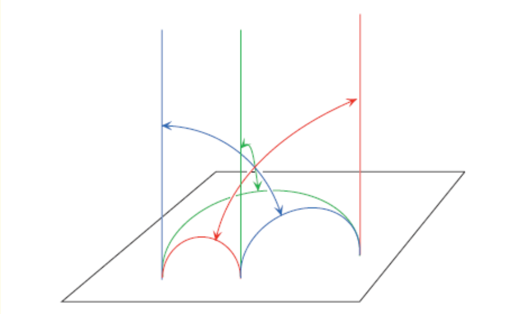
Então, $\overline{h}_p(q) := \lim_{t\to\infty} h(\gamma_{pq}(t))$ existe.

$\boxed{\text{Proposição: } \overline{h}_p : \partial\mathbb{H}^3 \to \partial\mathbb{H}^3 \text{ não depende de } p.}$

Dem. da prop. : Seja $p' \in \mathbb{H}^n$: $d(h(\gamma_{pq}(t)), h(\gamma_{pq}(t')))$ é limitada, porque $d(\gamma_{pq}(t), \gamma_{pq}(t'))$ é.

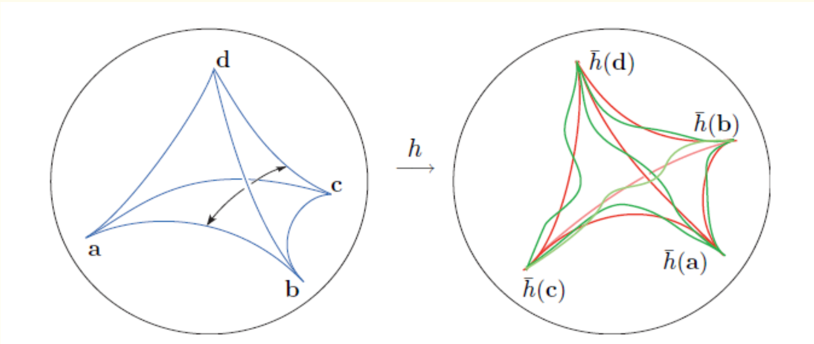
$\Rightarrow q = q'$.

Objetivo: para mostrar que $\bar{h}$ é quaseconformal, vamos estudar a ação de $\bar{h}$ sobre $(a,b,c,d) \in (\partial \mathbb{H}^3)^4$.



Def. "Diametro interior $\mathrm{InD}(T)$ do tetraedro $T$" $=$ max dist.(aresta, aresta opposita).

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lema: Seja } h \text{ uma } (C,C')\text{ q.isometria,} \\ \mathrm{InD}(T_{\bar{h}(a),\dots,\bar{h}(d)}) \leq C\,\mathrm{InD}(T_{a,b,c,d}) + C' + 2\tau\end{array}}$$




Dem. do lema:

$\forall$ e aresta de $T_{a,b,c,d}$, Seja $\bar{e}$ a geodesica á dist. $\leq \tau$ de $h(e)$, e $e'$ a aresta opposita.

Então: $d(h(e),h(e')) \leq C\,d(e,e') + C'$.

Depois: $\mathrm{InD}(T_{\bar{h}(a),\dots,\bar{h}(d)}) = \sup d(\bar{e},\bar{e}') \leq \sup d(h(e),h(e')) + 2\tau \leq \sup C\,d(e,e') + C' + 2\tau$

$\leq C.\mathrm{InD}(T_{abcd}) + C' + 2\tau$

## Relação com aplicações quaseconformais:

"$\text{skew}(a_1, a_2, a_3) := \sup \frac{|a_i - a_j|}{|a_i - a_k|}$"

Seja $h : [1,\infty) \to [1,\infty) \nearrow, C^0$, a condição

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{skew}(f(a), f(b), f(c)) \leq h(\text{skew}(a,b,c)) \\ \text{skew}\, f^{-1}(a'), f^{-1}(b'), f^{-1}(c')) \leq h(\text{skew}(a', b', c')) \end{array}}$$

é suficiente para mostrar que $f$ é $K$-qc.

**Lema:** $\exists \varphi, \psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ com $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, $\lim \psi(x) = \infty$ tais que:

$$\varphi(\text{InD}(T_{a,b,c,\infty})) \leqslant \text{skew}(a,b,c) \leq \psi(\text{InD}(T_{a,b,c,\infty}))$$

Obs.: $a = 0, b = 1$,

$\text{skew}(a,b,c) = \frac{1}{|c|}$.

Conseq: $\overline{h}$ é quaseconformal!