MAT2352 Lista 6

1. Determine uma representação paramétrica de cada uma das superfície descritas abaixo e calcule sua área:

(a) S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ interior ao cone $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$; Resp. $4\pi(2-\sqrt{2})$.
(b) S é a parte do cilindro $x^2+z^2=1$ compreendida entre os planos $y=-1$ e $y=3$; Resp. 8π.
(c) S é a parte do plano $z=2x+3y$ que é interior ao cilindro $x^2+y^2=16$; Resp. $16\pi\sqrt{14}$.
(d) S é a parte do paraboloide hiperbólico $z=y^2-x^2$ que está entre os cilindros $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$; Resp. $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$.
(e) S é a parte do cilindro $x^2+z^2=a^2$ que está no interior do cilindro $x^2+y^2=a^2$, onde $a>0$; Resp. $8a^2$.

2. Calcule as seguintes integrais de superfícies

(a) $\iint_S y d\sigma$, onde S é a superfície dada por $z=x+y^2,\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2$; R. $13\sqrt{2}/3$.
(b) $\iint_S x^2 d\sigma$, onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2=1$; Resp. $4\pi/3$.
(c) $\iint_S y d\sigma$, onde S é a parte do plano $3x+2y+z=6$, que está contido no primeiro octante; Resp. $3\sqrt{14}$.
(d) $\iint_S xz d\sigma$, onde S é o triângulo com vértices (1,0,0), (1,1,1) e (0,0,2); Resp. $7\sqrt{6}/24$.
(e) $\iint_S (x^2+y^2) d\sigma$, onde S é a parte do paraboloide $x=4-y^2-z^2$ contida no semi-espaço $x\geq 0$; Resp. $\frac{\pi}{840}(12563\sqrt{17}-2347)$.

3. Calcule a integral de superfície $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N} d\sigma$ para cada um dos campos de vetores $\vec{F}$ e superfícies orientadas S indicadas abaixo. Em outras palavras, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S. Quando S é uma superfície fechada, admita que S está orientada pela normal *exterior*.

(a) $\vec{F}(x,y,z)=x^2y\vec{i}-3xy^2\vec{j}+4y^3\vec{k}$ e S é a parte do paraboloide $z=9-x^2-y^2$, com $z\geq 0$, orientada de modo que a normal no ponto (0,0,9) é $\vec{k}$; Resp. 0.
(b) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+xy\vec{j}+xz\vec{k}$ e S é a parte do plano $3x+2y+z=6$, interior ao cilindro $x^2+y^2=1$, orientada de modo que seu vetor normal é $\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$; Resp. $-3\pi/4$.
(c) $\vec{F}(x,y,z)=-x\vec{i}-y\vec{j}+z^2\vec{k}$ e S é a parte do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, entre os planos $z=1$ e $z=2$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{k}<0$; Resp. $-73\pi/6$.
(d) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ e S é a esfera $x^2+y^2+z^2=9$; Resp. 108π.
(e) $\vec{F}(x,y,z)=-y\vec{i}+x\vec{j}+3z\vec{k}$ e S é o hemisfério $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, orientada de modo que a normal no ponto (0,0,4) é $\vec{k}$; Resp. 128π.
(f) $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-z\vec{k}$ e S consiste do paraboloide $y=x^2+z^2,\ 0\leq y\leq 1$ e do disco $x^2+z^2\leq 1,\ y=1$, orientada para fora; Resp. $-\pi/2$.
(g) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+2y\vec{j}+3z\vec{k}$ e S é o cubo de vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$; Resp. 48.
(h) $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\vec{i}-(2y+1)\vec{j}+z\vec{k}$ e S é o retângulo de vértices (1,0,1), (1,0,0), (0,1,0) e (0,1,1), orientado de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{j}>0$; Resp. -1.
(i) $\vec{F}(x,y,z)=-yz\vec{i}$ e S é o a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ exterior ao cilindro $x^2+y^2\leq 1$, orientado de modo que a normal no ponto (2,0,0) é $\vec{i}$; Resp. 0.
(j) $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ e S é a parte da superfície $z=\sqrt{4-x}$, limitada pela superfície cilíndrica $y^2=x$, orientado de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{i}>0$; Resp. $128/5$.
(k) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}-2z\vec{k}$ e S é a parte do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, limitada pelo cilindro $x^2+y^2=2x$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{k}<0$; Resp. $32/3$.

4. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + 2xy\vec{j} + 3xy\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do plano $3x + y + z = 3$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. 7/2.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (z^2 + e^{x^2})\vec{i} + (y^2 + \ln(1+y^2))\vec{j} + (xy + \operatorname{sen} z^3)\vec{k}$ e γ é a fronteira do triângulo com vértices (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,2), orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. 4/3.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (2z + \operatorname{sen} e^{x^3})\vec{i} + 4x\vec{j} + (5y + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} z^2))\vec{k}$ e γ é a intersecção do plano $z = x + 4$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -4π.

(d) $\vec{F}(x,y,z) = (x + \cos x^3)\vec{i} + y\vec{j} + (x^2 - y^2 + z^{100})\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -1.

(e) $\vec{F}(x,y,z) = (y + z)\vec{i} + (2x + (1 + y^2)^{20})\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $z = y$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. π.

(f) $\vec{F}(x,y,z) = (y + \cos\cos x)\vec{i} + (z + \operatorname{sen}\cos y)\vec{j} + x\vec{k}$ e γ é a intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ com o plano $x + y + z = 0$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário. Resp. $-\pi a^2\sqrt{3}$.

5. Calcule $\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{r}$, sendo:

(a) $\vec{v} = (yz + \cos(\operatorname{sen} x), xz + \ln(1 + y^4), zy)$ e γ é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 2x + 3$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -24π.

(b) $\vec{v} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{z^3}{1+z^2}) + (\operatorname{sen}\ln(1+x^4), e^{y^3}, z^2)$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2+y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido horário; Resp. -2π.

(c) $\vec{v} = (2xz^3, x^2y^2, 3x^2z^2) + (y, 0, 0)$ e γ é a intersecção das superfícies $z = \sin y + 10$ e $x^2 + y^2 = 16$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -16π.

(d) $\vec{v} = (x - y^2, x - z + \frac{y^2}{2} + \sin y, y)$ e γ é a intersecção do paraboloide $4z = x^2 + y^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. 4π.

(e) $\vec{v} = (e^x \sin y, e^x \cos y - z, y)$ e γ é o bordo da superfície obtida pela rotação em torno do eixo Oz do grÃ¡fico de $z = \dfrac{1}{y^2},\ e \le y \le e^2$. Escolha uma orientação para γ. Resp. 0.

(f) $\vec{v} = (\operatorname{sen}\ln(1+x^2), \frac{-z}{y^2+z^2} + e^{y^4}, \frac{y}{y^2+z^2} + \cos(z^{40}))$ sendo γ dado pela intersecção do cilindro $y^2 + z^2 = 4$ com o plano $x = y + z$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário. Resp. 2π.

6. Calcule $\iint_S (\operatorname{rot}\vec{F})\cdot\vec{N}dS$ sendo:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e S é a parte do paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 5$, orientada pelo campo de vetores normais que aponta para cima; Resp. 4π.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (xz,\ x - y,\ x^2y)$ e S formada pelas 3 faces, que não estão no plano xy, do tetraedro formado pelos planos coordenados e o plano $3x + y + 3z = 6$, sendo $\vec{N}$ o campo normal exterior ao tetraedro; Resp. 6.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, z, yz)$ e S a parte do hiperboloide $x^2+y^2-z^2 = 1$ limitada por $x^2+y^2 = 4$ com normal que aponta para o eixo z. Resp. 0.

7. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$, ou seja, o fluxo de $\vec{F}$ através de S ($\vec{N}$ = normal unitária exterior), para:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = -xz\vec{i} + (y^3 - yz)\vec{j} + z^2\vec{k}$ e S o elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; Resp. $\frac{4}{5}\pi ab^3 c$.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + y\,\mathrm{sen}(z),\ y^3 + z\,\mathrm{sen}(x),\ 3z)$ e S a superfície do sólido limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$. Resp. $\frac{194\pi}{5}$.