Centro de massa, momentos de inércia

Lembra:

Para um fio no espaço, com "densidade linear" $\delta(x,y,z)$ (i.e massa por unidade de comprimento), parametrizado por $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, temos:

$$\underline{\text{massa}} \quad M = \int_\gamma \underbrace{\delta(x,y,z)\,ds}_{dm} = \int_a^b \delta(x(t),y(t),z(t)) \underbrace{\|\gamma'(t)\|\,dt}_{ds}.$$

Também:

<u>o momento de inércia</u> do fio em relação a um eixo dado é:

$$I = \int_\gamma r^2 \underbrace{\delta(x,y,z)\,ds}_{dm}$$, onde r = distância do ponto (x,y,z) ao eixo.

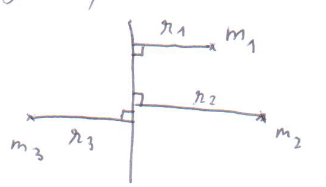
Centro de massa:

o centro de massa de um fio $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ é o ponto (x_c, y_c, z_c) dado por:

$$x_c = \frac{\int_\gamma x\,dm}{\int_\gamma dm}, \quad y_c = \frac{\int_\gamma y\,dm}{\int_\gamma dm}, \quad z_c = \frac{\int_\gamma z\,dm}{\int_\gamma dm}.$$

ex: Calcule o centro de massa do fio $\gamma(t) = (t,t,t)$, $0 \le t \le 1$, com densidade linear $\delta(x,y,z) = xyz$.

Agora queremos fazer o mesmo estudo para sólidos.



eixo fixo no espaço $\mathbb{R}^3$

def: momento de inércia do sistema de n partículas de massas $m_1, \ldots, m_n$ em relação ao eixo é dado por:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Interpretação: rotação com velocidade angular constante ω do sistema

$$\Rightarrow \text{Energia cinética} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

No espaço: sólido B com densidade (volumetrica) $\delta(x,y,z)$:

$$I = \iiint_B r^2\,dm$$ onde $dm = \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ e r = distância de (x,y,z) do eixo.

<u>exo:</u> momento de inércia de um ~~tetraedro~~ sólido homogêneo $x+y+z \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, em relação ao eixo z.

$\Updownarrow$

$\delta(x,y,z) = \text{constante} = k$

Temos: $I = \iiint_B \underset{r^2}{(x^2+y^2)} \cdot \underbrace{k\,dx\,dy\,dz}_{dm} = k\cdot\iint_T \left(\int_0^{4-x-y}(x^2+y^2)\,dz\right)dy\,dx$, onde T = triângulo $\begin{cases} x+y \le 4 \\ x\ge 0 \text{ e } y\ge 0. \end{cases}$

$$\Rightarrow I = k\iint_A (x^2+y^2)(4-x-y)\,dx\,dy = k\int_0^4\int_0^{4-x}(x^2+y^2)(4-x-y)\,dy\,dx = \dots\text{etc}\dots = \frac{512}{15}k.$$

exo: momento de inércia de um cubo (homogêneo $[0,L]^3$ em relação ao eixo z:

sol.: $I = \iiint_C (x^2+y^2)\,k\,dx\,dy\,dz = k\iint_A\left(\int_0^L (x^2+y^2)\,dz\right)dx\,dy = kL\int_0^L \underbrace{\int_0^L (x^2+y^2)\,dx}_{=\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_0^L = \frac{L^3}{3}+y^2L} dy$

então $I = kL\cdot\left(\frac{L^4}{3}+L\cdot\frac{L^3}{3}\right) = \frac{2}{3}kL^5 = \frac{2}{3}L^2\cdot \underset{\text{massa total}}{M}$.

exemplo: cilindro homogêneo $(x-a)^2+y^2 \le a^2$ e $0\le z\le h$.

a) Momento de inércia em relação à reta $x=a$, $y=0$

~~b)~~ " " " " ~~...~~

$I = \iiint_B \underset{(x-a)^2+y^2}{r^2}\cdot \underset{k\,dx\,dy\,dz}{dm}$. Coordenadas cilíndricas: $\begin{cases} x-a = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$

Com essas coordenadas, o cilindro B é $A = \{(\rho,\theta,z) \,/\, 0\le\rho\le a,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le h\}$.

$$I = \iiint_A \rho^2\cdot k\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^a\rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^h dz\right) = 2\pi\left(\frac{a^4}{4}\right)h = \frac{a^2}{2}\underbrace{(k\pi a^2h)}_{M}.$$

b) Momento em relação ao eixo z

Resp: [agora o cilindro é $(x-a)^2+y^2=a^2 \Rightarrow \underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2} = \underbrace{2x}_{2a\cos\theta}$.]

$I = \frac{3Ma^2}{2}$ onde $M = k\pi a^2 h$.

Centro de massa: de um corpo B com densidade $\delta(x,y,z)$ é o ponto (x_c, y_c, z_c) dado por:

$$x_c = \frac{\iiint_B x\, dm}{\iiint_B dm} \quad , \quad y_c = \frac{\iiint y\, dm}{\iiint_B dm} \quad , \quad z_c = \frac{\iiint z\, dm}{\iiint_B dm}$$

exo:

Centro de massa da semi-esfera homogênea $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ e $z \geq 0$.

a) Massa? $M = \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{densidade}}}{K} \cdot V = K \cdot \frac{2\pi R^3}{3}$.

b) $K \iiint_B z\, dx\,dy\,dz = K \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R (r\cos\varphi)\, r^2 \operatorname{sen}\varphi \; d\varphi\, dr\, d\theta$

$$= K \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R r^3 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \right)$$

$$= 2\pi K \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

então $z_c = \frac{3R}{8}$ e o centro de massa é $\left(0, 0, \frac{3R}{8}\right)$ pela simetria do corpo.

exo: mesma questão, com $\delta(x,y,z) = K \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Resp. (utilizar coord. cilíndricas ou esféricas), $(x_c, y_c, z_c) = \left(0, 0, \frac{2}{5} R\right)$.