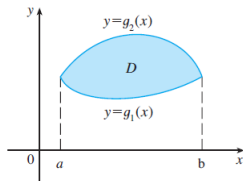
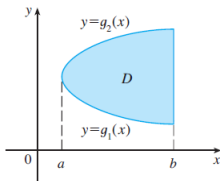
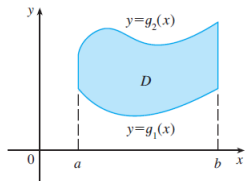


MAT 2352 : Aula 17/09/2015

Sylvain Bonnot (IME-USP)

16 de setembro de 2015

Integrais iteradas do tipo I



Teorema

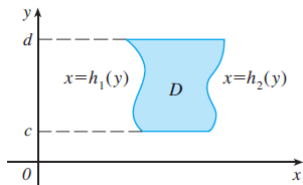
Sejam $c(x)$ e $d(x)$ duas funções contínuas em $[a, b]$ e tais que para todo $x \in [a, b]$, $c(x) \leq d(x)$. Seja B o conjunto

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c(x) \leq y \leq d(x) \text{ e } x \in [a, b]\}.$$

Se $f(x, y)$ for contínua em B então

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Integrais iteradas do tipo II



Teorema

Sejam $a(y)$ e $b(y)$ duas funções contínuas em $[c, d]$ e tais que para todo $y \in [c, d]$, $a(y) \leq x \leq b(y)$. Seja B o conjunto

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a(y) \leq x \leq b(y) \text{ e } y \in [c, d]\}.$$

Se $f(x, y)$ for contínua em B então

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

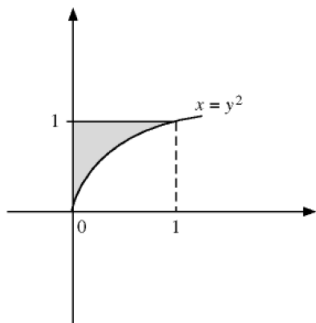
Exemplos: tipo I

Exercício (Calcule a seguinte integral:)

$$\iint_B f(x, y) dx dy, \text{ onde } f(x, y) = \sqrt{1+y^3} \text{ e } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x} \leq y \leq 1\}.$$

Resp.:

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_{a(y)}^{b(y)} (\sqrt{1+y^3}) dx dy = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} (\sqrt{1+y^3}) dx \right] dy = \\ &= \int_0^1 \left[x \sqrt{1+y^3} \right]_0^{y^2} dy = \\ &= \int_0^1 y^2 \sqrt{1+y^3} dy = \frac{2}{9} \left[(1+y^3)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{9} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$



Exemplos: tipo I

Exercício (Calcule a seguinte integral:)

$$\iint_B f(x, y) dx dy, \text{ onde } f(x, y) = \frac{y}{x + y^2} \text{ e}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Resp.:

Temos

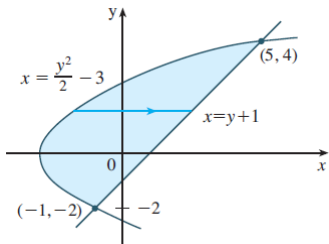
$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y) dy dx &= \int_1^4 \left[\int_0^{\sqrt{x}} \frac{y}{x + y^2} dy \right] dx = \\ &= \int_1^4 \frac{1}{2} \left[\ln(x + y^2) \right]_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 (\ln 2x - \ln x) dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \ln 2 dx = \\ &= \frac{\ln 2}{2} [x]_1^4 = \frac{3}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Exemplos: tipo II

Exercício

Calcule $\iint_B xy dx dy$ onde B é a região limitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

Resp.:



$$= \int_{-2}^4 \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy \, dx \, dy = \int_{-2}^4 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y [(y+1)^2 - (\frac{1}{2}y^2 - 3)^2] dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^4 = 36$$

Teorema

A área de um domínio B (de tipo I ou II) pode ser calculada como:

$$\text{Área}(B) = \iint_B dx dy.$$

Observação: as vezes podemos encontrar a notação dA para $dx dy$. Este dA pode ser visto como um *elemento de área*.

Exercício (Calcule a área de B):

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ln x \leq y \leq 1 + \ln x, y \geq 0 \text{ e } x \leq e\}.$$

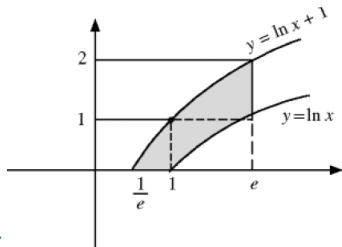
Resp.:

$$\text{Área} = \int_{\frac{1}{e}}^1 \int_0^{1+\ln x} dy dx + \int_1^e \int_{\ln x}^{1+\ln x} dy dx$$

$$\text{Área} = \int_{\frac{1}{e}}^1 (1 + \ln x) dx + \int_1^e dx$$

$$\text{Área} = \int_{\frac{1}{e}}^1 dx + \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e dx$$

$$\text{Área} = [x]_{\frac{1}{e}}^1 + [x \ln x - x]_{\frac{1}{e}}^1 + [x]_1^e = e + e^{-1} - 1.$$



Aplicações : cálculo de volumes

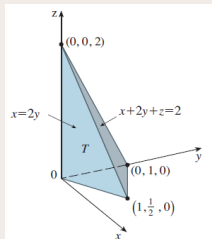
Teorema

Se $f(x, y) \geq 0$, então o volume V do sólido que está acima do domínio B e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ é

$$V = \iint_B f(x, y) dx dy.$$

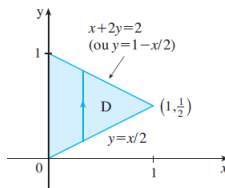
Exercício

Calcule o volume do tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$.



Cálculo do volume do tetraedro

Resposta: A base do tetraedro é a seguinte:



$$\begin{aligned} V &= \iint_D (2 - x - 2y) \, dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2 \right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx \\ &= \int_0^1 \left[2 - x - x \left(1 - \frac{x}{2} \right) - \left(1 - \frac{x}{2} \right) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \right] dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} - x^2 + x \right|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Determine o volume do sólido dado.

1. Abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$
2. Abaixo do parabolóide $z = 3x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x$ e $x = y^2 - y$
3. Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$
4. Delimitado pelo parabolóide $z = x^2 + 3y^2$ e pelos planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$