MAT 234 : Aula 17/09/2015

Sylvain Bonnot (IME-USP)

16 de setembro de 2015

2.1 Integração e funções mensuráveis

DEFINIÇÃO 2.1 (Função Mensurável) *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é chamada de Σ-***mensurável**, *ou simplesmente* **mensurável**, *se satisfaz:*

$$\{x \in X; \;\; f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a)) \in \Sigma \quad \text{para todo} \quad a \in \mathbb{R}.$$

LEMA 2.2 *Seja Σ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Então para qualquer função $f : X \to \mathbb{R}$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\{x \in X; \;\; f(x) < a\} \in \Sigma$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$;
(b) $\{x \in X; \;\; f(x) \leq a\} \in \Sigma$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$;
(c) $\{x \in X; \;\; f(x) > a\} \in \Sigma$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$;
(d) $\{x \in X; \;\; f(x) \geq a\} \in \Sigma$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 2.3 *De forma geral, se Σ é uma σ-álgebra em X e T é uma σ-álgebra em Y, dizemos que $f : X \to Y$ é* **mensurável** *se*

$$f^{-1}(E) \in \Sigma \quad \text{para todo} \quad E \in \mathrm{T}.$$

TEOREMA 2.4 (Propriedades de Funções Mensuráveis I) *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções Σ-mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. São Σ-mensuráveis:*

(a) cf; *(b) $f + g$;* *(c) f^2;* *(d) fg;* *(e) $|f|$.*

Demonstração.

(a) Seja $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Se $c = 0$, então $\{x \in X;\ \ cf(x) < a\}$ é X ou $\varnothing$, e portanto pertence a Σ. Se $c > 0$, então

$$\{x \in X;\ \ (cf)(x) < a\} = \left\{x \in X;\ f(x) < \frac{a}{c}\right\} \in \Sigma.$$

O caso $c < 0$ é similar. Como a é arbitrário, cf é mensurável.

(b) Por hipótese, se $r \in \mathbb{Q}$, então

$$S_r = \{x \in X;\ \ f(x) < r\} \cap \{x \in X;\ \ g(x) < a - r\} \in \Sigma.$$

Como claramente

$$\{x \in X;\ \ (f + g)(x) < a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r,$$

segue que $(f + g)$ é mensurável.

(c) Seja $a \in \mathbb{R}$. Se $a < 0$, então $\{x \in X;\ \ (f(x))^2 > a\} = X$; se $a \geq 0$, então

$$\{x \in X;\ \ (f(x))^2 > a\} = \{x \in X;\ \ f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in X;\ \ f(x) < -\sqrt{a}\}.$$

(d) Segue de (a), (b) e (c) pois $fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$.

(e) Se $a < 0$, então $\{x \in X;\ \ |f(x)| > a\} = X$; se $a \geq 0$, então

$$\{x \in X;\ \ |f(x)| > a\} = \{x \in X;\ \ f(x) > a\} \cup \{x \in X;\ \ f(x) < -a\}.$$

2.2 Propriedades das funções mensuráveis II

Lembra: $\limsup f_n$ significa $\inf_k \sup_{n\geq k} f_n$.

TEOREMA 2.5 (Propriedades de Funções Mensuráveis II) *Seja $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Σ-mensuráveis de X em $\mathbb{R}$. São Σ-mensuráveis:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$; *(b)* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$; *(c)* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$; *(d)* $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$; *(e)* $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$.

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ defina $H_n(a) \triangleq \{x;\ \ f_n(x) \leq a\} \in \Sigma$. A prova segue dos seguintes fatos:

(a) $\{x \in X;\ \ (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(x) \leq a\} = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{m\geq n} H_m(a + 2^{-k})$;

(b) $\{x \in X;\ \ (\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) \leq a\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n(a)$;

(c) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$;

(d) $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} f_{m+n}$;

(e) $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = -\limsup\limits_{n\to\infty}(-f_n)$. ∎

Funções simples e integração

DEFINIÇÃO 2.6 *Dado $A \subset X$, definimos sua* **função indicadora** *ou* **característica** $I_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ *por* $I_A(x) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin A, \\ 1, & \text{se } x \in A. \end{cases}$ *Outra notação usual é* χ_A.

DEFINIÇÃO 2.7 (Função Simples) *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida. Dizemos que* $f : X \to \mathbb{R}$ *é uma* **função simples** *se* $f = \sum_{i=0}^{n} a_i I_{E_i}$, *onde* $a_i \in \mathbb{R}$ *e cada* E_i *é* Σ*-mensurável, isto é,* $E_i \in \Sigma$.

DEFINIÇÃO 2.8 (Integral de uma função simples) *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida e* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função simples, isto é,* $f = \sum_{i=0}^{m} a_i I_{E_i}$. *Definimos a* **integral da função simples** f *com relação a medida* μ *(pode ser* ∞*!) por*

$$\int f \, d\mu \triangleq \sum_{i=0}^{m} a_i \mu(E_i).$$

Funções simples e integração

DEFINIÇÃO 2.10 (Integral de funções não-negativas) *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida e* $f \geq 0$ *uma função* Σ*-mensurável. Definimos a* **integral da função não-negativa** f *com relação a medida* μ *(pode ser* ∞*!) por*

$$\int f\, d\mu \triangleq \sup\left\{\int g\, d\mu;\ g \text{ é uma função simples e } 0 \leq g \leq f\right\}.$$

DEFINIÇÃO 2.11 (Integração em Subconjuntos) *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida,* $H \in \Sigma$*, e* $f \geq 0$ *uma função* Σ*-mensurável. Definimos*

$$\int_H f\, d\mu \triangleq \int \tilde{f}\, d\mu, \quad \text{onde } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in H, \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus H. \end{cases}$$