

Prova P3 SUB de MAT 0234- Medida e Integração
08/12/2015 Professor: Sylvain Bonnot

Nome: _____

N^o USP : _____ RG: _____

Assinatura: _____

Prova (A)	
Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS! Boa sorte!

1^a Questão: (2,5 pontos) Seja $s > 0$. Mostre que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-sx} x^{-1} \sin^2(x) dx = \frac{1}{4} \log(1 + 4s^{-2}).$$

2^a Questão: (2,5 pontos) Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [0, +\infty)$ seja $f_n(x) = \frac{ne^{-x}}{n\sqrt{x} + 1}$.

- Mostre que para todo n , f_n é integrável.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ seja $a_n := \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x) dx$. Mostre que $(a_n)_{n \geq 0}$ converge e determine o limite.

3^a Questão: (2,5 pontos) Seja μ uma medida em \mathbb{R} tal que $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$. Seja $f(x) = \mu((-\infty, x])$.
Mostre:

$$\int [f(x+c) - f(x)] dx = c\mu(\mathbb{R}).$$

4^a Questão: (2,5 pontos) Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) = 1$. Seja f uma função positiva integrável. Mostre que se $\mu(\{f > 0\}) < 1$ então

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \|f\|_p = 0.$$