

Prova P3 de MAT 0234- Medida e Integração
01/12/2015 Professor: Sylvain Bonnot

Nome: _____

Nº USP : _____ RG: _____

Assinatura: _____

| Prova (A) | |
|-----------|---|
| Q | N |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| Total | |

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS! Boa sorte!

1ª Questão: (4 pontos) Seja f a função definida por

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } f(0, 0) = 0.$$

a) Calcule

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 f(x, y) dy \right] dx \text{ e também } \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 f(x, y) dx \right] dy.$$

b) Mostre que f não é integrável no quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

2ª Questão: (3 pontos) Seja $f \in L^p([0, +\infty))$ e $g \in L^q([0, +\infty))$ onde $1 \leq p, q < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Calcule

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s)g(s)ds.$$

3ª Questão: (3 pontos) Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida tal que $\mu(X) < +\infty$. Para qualquer f mensurável podemos definir $E_n := \{x \in X; (n-1) \leq |f(x)| < n\}$. Mostre a seguinte equivalência (para $1 \leq p < +\infty$):

$$f \in L^p(X) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^p \mu(E_n) < +\infty.$$