Prova P1 de MAT 0234- Medida e Integração
03/09/2015 Professor: Sylvain Bonnot

Nome: ______________________________

$N^{\underline{0}}$ USP : ____________________ RG: ____________________

Assinatura: ______________________________

Prova (A)	
Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS! Boa sorte!

$1^{\underline{a}}$ **Questão:** (2 pontos) Seja $S \subset (0,1)$. Suponhamos que existe $T \subset (0,1)$ mensurável tal que $T \subset S$ e $m^\star(T) = m^\star(S)$. Mostre que S é mensurável.

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** (2 pontos) Seja $S \subset (0,1)$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

1. S é mensurável.
2. existe uma interseção enumerável $G = \bigcap_n U_n$ de abertos $U_n \supset S$ tal que $m^\star(G - S) = 0$.

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** (3 pontos) Seja X um conjunto, Σ uma $\sigma-$álgebra em X e μ uma medida em (X, Σ) tal que $\mu(X) < +\infty$. Para todos E, F subconjuntos de X, vamos definir $E \Delta F := (E - F) \cup (F - E)$.

a) Se E, F são elementos de Σ tais que $\mu(E \Delta F) = 0$, mostre que $\mu(E) = \mu(F)$.

b) Para todos E, F em Σ, defina $E \sim F$ se e somente $\mu(E \Delta F) = 0$. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

c) Para todos E, F, G em Σ mostre que $\mu(E \Delta G) \leq \mu(E \Delta F) + \mu(F \Delta G)$.

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** (3 pontos) Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida μ tal que $\mu(X) = 1$.
Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Sigma$ tais que $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) > n - 1$. Mostre que $\mu(\bigcap_{i=1}^n A_i) > 0$.