MAT 0320 Lista 2 soluções

Prof. Sylvain Bonnot

1 Conjuntos abertos, fechados

Exercício 1. Mostre que $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$ é aberto.

Solução:seja z_0 tal que $\operatorname{Im}(z_0) = 2R > 0$, vamos mostrar que o disco $D(z_0, R) \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Seja $z \in D(z_0, R)$ então $z = z_0 + r e^{i\theta}$ com $r < R$, e $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0 + r \operatorname{sen} \theta > \operatorname{Im} z_0 - R = 2R - R = R > 0$.

Exercício 2. Mostre que o disco fechado $\Delta := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leqslant 1\}$ é fechado.

Solução: o complementar é aberto. De fato, seja z_0 tal que $|z_0| = R > 1$ e seja $d := R$. Vamos mostrar que o disco $D(z_0, d)$ é contido no complementar de Δ. Seja z em $D(z_0, d)$, então a desigualdade triangular implica: $R = |z_0| \leqslant |z_0 - z| + |z| < d + |z| = R - 1 + |z|$, isso implica $1 < |z|$.

2 Limites

Exercício 3. Prove que $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ implica que $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |L|$.

Solução: a desigualdade triangular implica $||f(z)| - |L|| \leqslant |f(z) - L| \to 0$.

Exercício 4. Mostre: $\lim_{z \to \infty} \frac{6z+2}{2z-3} = 3$.

Solução:$\frac{6z+2}{2z-3} = \frac{z}{z} . \frac{6+2/z}{2-3/z} \to 3$

Exercício 5. Calcule: $\lim_{z \to i} \frac{6z+2}{2z-3} = \frac{6i+2}{2i-3} = 6/13 - (22i)/13$.

Exercício 6. Calcule: $\lim_{z \to -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i} = \lim z^2 - 2iz - 4 = -12$.

Exercício 7. Prove que $f(z) = 1/z$ é contínua em todo $z \neq 0$.

Solução:1) $g(z)$ contínua e $\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)}$contínua.

solução 2) $1/(z+h) - 1/z = \frac{-h}{(z+h).z} \to 0$ quando $h \to 0$.

3 Derivadas, equações de Cauchy-Riemann

Exercício 8. Utilize as equações de Cauchy-Riemann para verificar, no caso de cada uma das funções dadas, qual é holomorfa e em que domínio. Em caso positivo, determine a derivada $f'(z)$:

a) $w = z^3$

solução:$u = x^3 - 3\mathrm{xy}^2$ e $v = 3x^2 y - y^3$. Então $u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y$ e $u_y = -6xy = -v_x$, a derivada e $3z^2$.

b) $w = \overline{(e^z)}$ ver exercício 9.c) abaixo

c) $w = \bar{z}$ não é holomorfa (foi feito durante a aula)

d) $w=1/z$
holomorfa em $z\neq 0$, com $u=\frac{x}{x^2+y^2}\Rightarrow u_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ e $u_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.
Também, $v=\frac{-y}{x^2+y^2}\Rightarrow v_x=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.=-u_y$ e $v_y=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=u_x$.
A derivada : $-1/z^2$

e) $w=e^{-y}.(\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x)$ é holomorfa porque é igual a $e^{i.z}$, com derivada ie^{iz}

Exercício 9. Mostre que $f'(z)$ não existe para as seguintes funções:

a) $z-\bar{z}$ porque $\bar{z}$ não é holomorfa.

b) $2x+\mathrm{xy}^2 i$ porque $u_x\neq v_y$

c) $e^x(\cos y-i\,\mathrm{sen}\,y)$ porque $u_y=-e^x\mathrm{sen}\,y\neq -v_x=e^x\,\mathrm{sen}\,y$.

Exercício 10. Mostre que a seguinte função é holomorfa em $\mathbb{C}$:
$f(z)=3x+y+i(3y-x)$, porque ela é simplesmente $f(x+\mathrm{iy})=(3-i).(x+\mathrm{iy})$ isto é $f(z)=3z$.

Exercício 11. Prove que exp $(\bar{z})$ não é holomorfa em nenhum ponto. porque $e^{\bar{z}}=e^x(\cos y-i\,\mathrm{sen}\,y)$, e ver 9.c) acima.

4 Função exponencial $e^z=\exp(z)$

Exercício 12. Determine todos os valores de z tais que:

a) $e^z=-2$ solução: $i\pi+\log 2+2in\pi$ para $n\in\mathbb{Z}$

b) $e^z=1+i\sqrt{3}$ solução : $z=-\log 2+i\pi/3+2n\pi, n\in\mathbb{Z}$

c) $e^{2z-1}=1$ solução $1/2+n\pi, n\in\mathbb{Z}$

Exercício 13. Mostre que $\exp(i\bar{z})\neq\overline{(\exp(\mathrm{iz}))}$ a menos que $z=\pm n\pi$, $n=0,1,\ldots$
Simplesmente escrever $e^{i\bar{z}}=e^y.e^{ix}$ e $\overline{(\exp(\mathrm{iz}))}=e^{-y}.e^{ix}$ então necessariamente $y=0$ e $x=-x+2in\pi$.

Exercício 14. Mostre que $|\exp(-2z)|<1$ se e somente se $\mathrm{Re}(z)>0$. Lembra que $|e^z|=e^{\mathrm{Re}\,x}$....

Exercício 15. Examine o comportamento de:

a) $\exp(x+\mathrm{iy})$ quando $x\to-\infty$ Solução: temos $e^{x+\mathrm{iy}}=e^x.e^{iy}$ com $e^x\to 0$ e e^{iy} limitada, então o limite e zero.

b) $\exp(2+\mathrm{iy})$ quando $y\to\infty$. Solução: o limite não existe, porque por exemplo quando $y=2n\pi\to\infty, e^{2+\mathrm{iy}}=e^2$ mas quando $y=(2n+1)\pi\to\infty, e^{2+\mathrm{iy}}=e^{2+\mathrm{iy}}=-e^2$.