MAT 0320 Lista 1 soluções

Prof. Sylvain Bonnot

Exercício 1. Coloque os números complexos na forma $a+bi$:

a) $\frac{1}{2+3i} = \frac{2}{13} - \frac{3i}{13}$

b) $\frac{1+i}{3+2i} = \frac{5}{13} + \frac{i}{13}$

c) $(1+i)^3 = -2+2i$

d) $(2+3i)^2 = -5+12i$

Exercício 2. Coloque os números complexos na forma polar:

a) $1+i\sqrt{2} = \sqrt{3}e^{i2\pi(\arccos(1/3))}$

b) $4i = 4e^{i\pi/2}$

c) $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

d) $-5 = 5e^{i\pi}$

Exercício 3. Represente graficamente os conjuntos de complexos que satisfazem a condição dada:

1. $z.\bar{z} = 1$: círculo de centro 0 e raio 1.
2. $z + \bar{z} + 2 = 0$: reta vertical $x = -1$.
3. $|z| = |z-1|$: mediatriz do segmento $[0,1]$
4. $z + \bar{z} + 2i = 0$: conjunto vazio !

Exercício 4. Seja $\lambda > 0$ com $\lambda \neq 1$. Mostre que o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z| = \lambda|z-1|$ é um círculo.

Solução: tomar o quadrado dos módulos e obter que $(x^2+y^2) = \lambda^2((x-1)^2+y^2)$, isto é $(\lambda^2-1)x^2 - 2\lambda^2 x + (\lambda^2-1)y^2 + \lambda^2 = 0$, equação de um círculo (fazer o completamento de quadrado.)

Exercício 5. Utilizando a identidade de De Moivre, calcule:

a) As raízes quadradas de $1+\sqrt{3}\,i$, $\sqrt{3} - i$ e $1+i$.
raizes de $1+\sqrt{3}\;i = \pm\sqrt{2}e^{i\pi/6}$, raizes de $\sqrt{3}\;-i$: $\pm\sqrt{2}e^{-i\pi/12}$, raizes de 1+i: $\pm\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$

b) As raízes cúbicas de $1-i$ e de i.
raizes de (1-i): $\sqrt[6]{2}.e^{-i\pi/12}, \sqrt[6]{2}.e^{7i\pi/12}, \sqrt[6]{2}.e^{15i\pi/12} = \sqrt[6]{2}.e^{i\pi/4}$.
raizes de i : $e^{i\pi/6}, e^{i5\pi/6}, e^{-i\pi/2}$

Exercício 6. Calcule as partes real e imaginária de $(1+i)^{100}$.

Solução: $(1+i)^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^{100} = (2i)^{50} = 2^{50}.i^{50} = -2^{50}$.

Exercício 7. Mostre que para todo número natural n e todo complexo $z \neq 1$ vale a identidade:

$$1+z+z^2+....+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Solução: escrever $S=1+z+...+z^n$ então $z.S=z+...+z^{n+1}$ e observar que $S-zS=1-z^{n+1}$.

Exercício 8. Utilizando o exercício anterior e tomando as partes reais de ambos os membros, verifique que a identidade

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+...+\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{\theta}{2}\right]}\right)$$

é valida para todo natural n e todo $0<\theta<2\pi$.

Solução:$1+e^{i\theta}+...+e^{in\theta}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}}.\frac{e^{i\theta/2}-e^{i(n+1/2)\theta}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}=\frac{e^{i\theta/2}-e^{i(n+1/2)\theta}}{2i\operatorname{sen}(\theta/2)}$
$=\frac{-i(e^{i\theta/2}-e^{i(n+1/2)\theta})}{2\operatorname{sen}\theta/2}=\frac{-i(\cos\theta/2+i\operatorname{sen}\theta/2-\cos(n+1/2)\theta+i\operatorname{sen}(n+1/2)\theta)}{2\operatorname{sen}\theta/2}$
e depois tomar a parte real dos dois lados.

Exercício 9. Seja n um número natural e seja $\zeta=e^{2\pi i/n}$, mostre que para todo número complexo z temos:

$$z^n-1=(z-\zeta)(z-\zeta^2)...(z-\zeta^n)$$

Solução:observar que todos os complexos ζ, ζ^2, ..., ζ^n são distintos e são raízes de z^n-1, então eles são exatamente as raízes dessa equação e podemos fatorar o polinômio assim:
$z^n-1=(z-\zeta)(z-\zeta^2)...(z-\zeta^n)$.

Exercício 10. Sejam z_1, z_2 números complexos. Prove que

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

e interprete o resultado geometricamente.

Solução:$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2).\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2).\overline{(z_1-z_2)}=2(|z_1|^2+|z_2|^2)+$ termos que se cancelam.