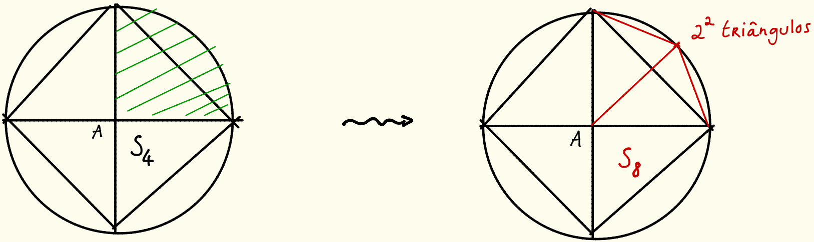
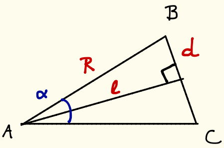
MAT 2352

Aula 18/08/2016

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2016





Temos: Area (Triângulo ABC) $= d \cdot \ell = \left(R \,\mathrm{sen}\, \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(R \cos \frac{\alpha}{2}\right)$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot 2 \,\mathrm{sen}\, \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

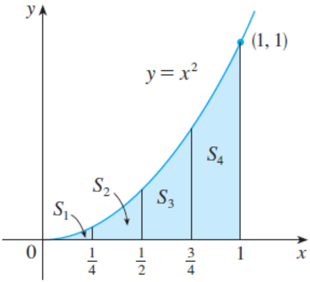
$$= \frac{R^2}{2} \cdot \mathrm{sen}\, \alpha$$

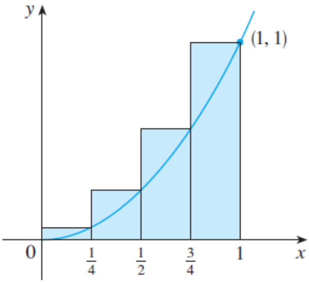
Depois de n etapas: temos 2^n triângulos, com angulo $\hat{A} = \frac{\pi/2}{2^n}$

Soma das áreas dos triângulos $= 2^n \cdot \frac{R^2}{2} \,\mathrm{sen}\, \frac{\pi/2}{2^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^n}{\pi/2} \cdot \frac{R^2}{2} \,\mathrm{sen}\, \frac{\pi/2}{2^n}$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot 1 = \frac{\pi R^2}{4}$$

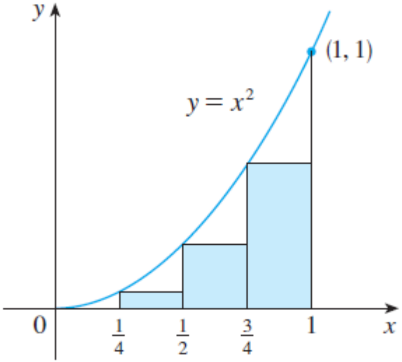
Ideia: como calcular a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$? ("dividir e aproximar")



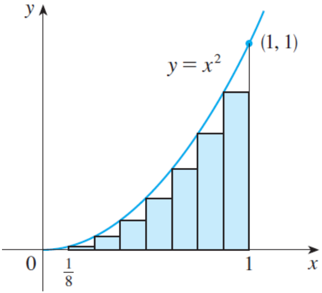


Aproximar com retângulos: obter uma estimativa superior da área: aqui $area(S) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4$. Os retângulos têm a mesma base $= 1/4$ e alturas $(1/4)^2, (2/4)^2, (3/4)^2, (4/4)^2$.

Aproximar com retângulos: obter uma estimativa inferior da área: aqui $\mathit{area}(S) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geq L_1 + L_2 + L_3 + L_4$. Os retângulos têm a mesma base $= 1/4$ e alturas $0, (1/4)^2, (2/4)^2, (3/4)^2$.

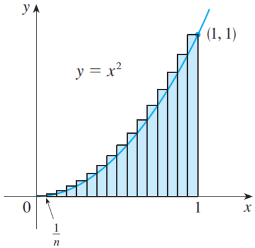


Aproximar com 8 retângulos: estimativa inferior e superior da área:
usando extremos esquerdos e direitos dos intervalos



Aproximando com n retângulos

Tomando o limite: vamos dividir $[0, 1]$ em n intervalos iguais, construir retângulos usando os extremos direitos, calcular a soma das áreas dos n retângulos e fazer $n \to \infty$.



$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

Somas uteis:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Prova das 3 formulas

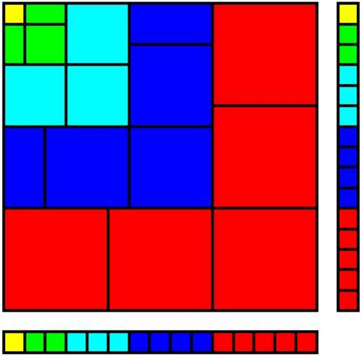
Formula 1: escrever

$$2S = (1 + 2 + \ldots + n) + (n + (n-1) + \ldots + 2 + 1)$$

$$= (1+n) + (2 + (n-1)) + \ldots + ((n-1) + 2) + (n+1) = n.(n+1)$$

Formula 2: indução!

Formula 3: prova geometrica:



Integral definida

Definição

Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Podemos dividir $[a, b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1], \ldots [x_{n-1}, x_n]$ de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Em cada $[x_{i-1}, x_i]$ vamos escolher um ponto amostral $x_i^\star$. Então a integral definida de f de a para b é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$$

Teorema

Se f é continua em $[a, b]$ ou tem um número finito de descontinuidades, então a integral de f de a para b existe.

Vocabulario: $f(x)$=integrando, a, b são os limites de integração (inferior e superior).

Definição

A soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$ é chamada uma "soma de Riemann"

Exemplos

Exercício

Se $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leq x \leq 6$, *escreve a soma de Riemann com* $n = 5$, *tomando como pontos amostrais os pontos médios.*

Exercício

Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{1+x_i} \Delta x, \ [1,5]$$

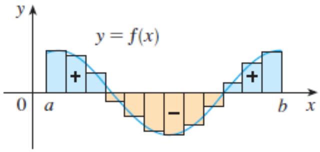
Exercício

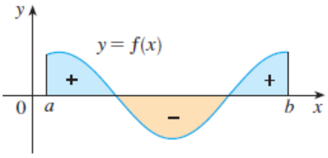
Se $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leq x \leq 6$, *escreve a soma de Riemann com* $n = 5$, *tomando como pontos amostrais os pontos médios.*

Exercício

Calcule $\int_1^2 x^3 dx$

Interpretação da integral: área líquida (=diferença das áreas)





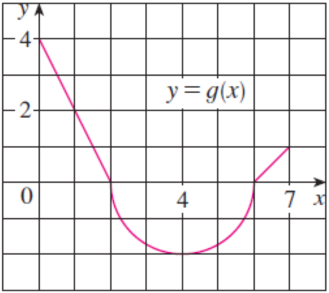
Teorema

1. *Se* $f(x) \geq 0$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. *Se* $f(x) \geq g(x)$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3. *Se* $m \leq f(x) \leq M$ *para* $a \leq x \leq b$ *então*
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)$

Exercício

O gráfico de g consiste em duas retas e um semicircuo. Use-o para calcular cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\,dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\,dx$



Mais exemplos

Exercício

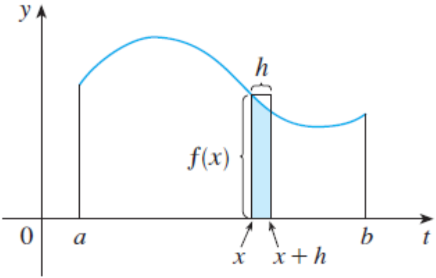
Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade sem calcular as integrais:

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\, dx \geqslant 0$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx$$

$$2 \leqslant \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\, dx \leqslant \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$$



Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 1)

Se f for contínua em $[a, b]$ então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é continua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental do cálculo

$$
\begin{aligned}
g(x+h)-g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\
&= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \\
&= \int_x^{x+h} f(t)\,dt
\end{aligned}
$$

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Agora o ultimo termo é quase como $h.f(x)$ então $F'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental do cálculo, parte 2

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 2)

Se f for contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Prova: com $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, sabemos que $g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)dt$. Mas também sabemos que duas antiderivadas de f diferem por uma constante

$$F(x) = g(x) + C$$

então $F(b) - F(a) = (g(b) + C) - (g(a) + C) = \int_a^b f(t)dt$.

7. $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\, dt$

8. $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t}\, dt$

9. $g(s) = \int_5^s (t - t^2)^8\, dt$

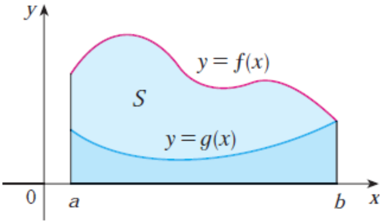
10. $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\, dx$

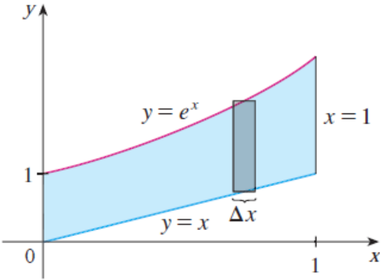
11. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\, dt$

Definição

Seja f contínua em $[a, b]$ com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Vamos definir A como o conjunto do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$. Então:

$$\text{área } A = \int_a^b f(x)dx.$$





Áreas entre duas curvas

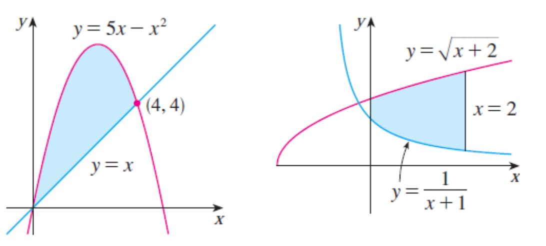
Definição

A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$ onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ é:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Exercício

Encontre as áreas das regiões sombreadas:



Exercício

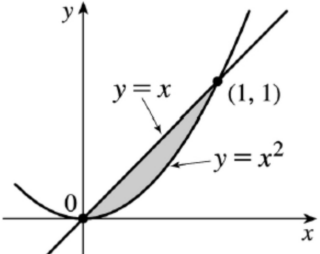
Encontre a área da região entre $y = x$ e $y = x^2$

Solução: Temos que determinar a interseção das duas curvas:

$$x = x^2 \Rightarrow x = 0 \text{ou } x = 1$$

Depois, entre $x = 0$ e $x = 1$ temos que $x \geq x^2$ então:

$$A = \int_0^1 (x - x^2)dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

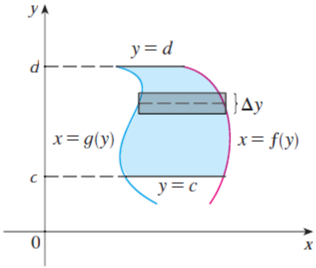


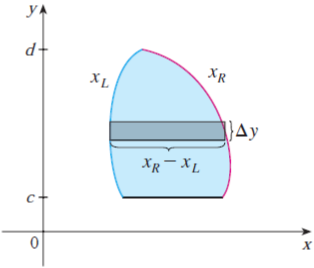
Áreas entre duas curvas

Exercício

Encontre a área da região entre $y = \sqrt{x}$ *e* $y = x/2$ *e* $0 \leq x \leq 9$

Funções de y: as vezes, é mais facil de descrever uma região com curvas do tipo $x = g(y)$.

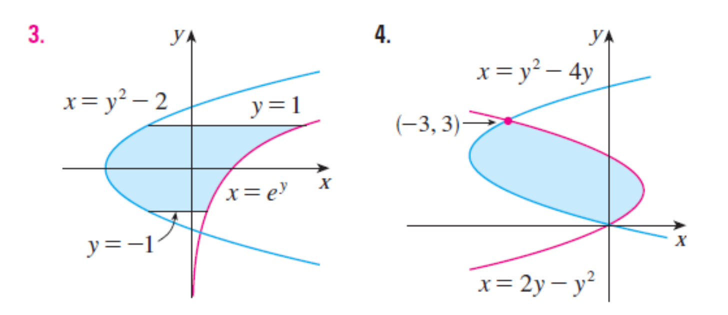




Funções de y:

Exercício

Encontre as áreas das regiões sombreadas:



Movimento de uma particula no eixo x

Uma particula se desloca no eixo x, com equação $x = x(t)$ e velocidade $v = v(t)$ (função contínua em $[a, b]$).

Definição

O deslocamento da particula entre os instantes a e b é a diferença

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)dt$$

Definição

O espaço percorrido pela particula entre os instantes a e b é definido como:

$$\int_a^b |v(t)|dt$$

Movimento de uma particula no eixo x

Exercício

Uma particula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2t - 3$, $t \geq 0$.

1. *Calcule o deslocamento entre* $t = 1$ *e* $t = 3$.
2. *Qual é o espaço percorrido entre os instantes* $t = 1$ *e* $t = 3$*?*

Valor Médio de uma função

Para uma quantidade finita de números:

$$y_{med} = \frac{y_1 + y_2 \ldots + y_n}{n}$$

Para um número infinito de medidas: dado um gráfico da temperatura $T = f(t)$ $0 \leq t \leq 24$ horas, podemos fazer 24 medidas e calcular a média (isto é fazer uma medida durante a primeira hora do dia, uma medida durante a segunda hora, etc...)

$$\frac{f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star)}{n}, \text{ com } n = 24$$

mas temos que

$$\frac{f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star)}{n} = \frac{1}{b-a} . \frac{b-a}{n} . (f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star))$$

cujo limite é $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

Valor Médio de uma função

Então podemos definir:

Definição

O valor médio da função f no intervalo $[a,b]$ é:

$$f_{med} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

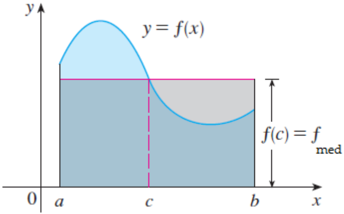
Teorema

Se f é contínua em $[a,b]$ então existe um $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

Prova: O teorema do valor médio para $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ diz que existe $c \in (a,b)$ tal que $F(b) - F(a) = F'(c).(b-a)$. Mas agora, temos que $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Valor Médio de uma função



Exercício

Se uma xicara de café tem uma temperatura de 95 graus, em uma sala cuja temperatura ambiente é de 20 graus. De acordo com a Lei de resfriamento de Newton, a temp. do café após t minutos será:

$$T(t) = 20 + 75e^{-t/50}$$

Qual é a temperatura média do café durante a primeira meia hora?

Integrais indefinidas

Definição

A integral indefinida de f é o conjunto de todas as antiderivadas de f. Ela é denotada por

$$\int f(x)dx.$$

Teorema

Para determinar $\int f(x)dx$, é suficiente de encontrar uma antiderivada F de f, e depois

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ onde } C \text{ é uma constante arbitraria.}$$

Tabela de antiderivadas

$$\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$$

Regra da Substituição

Teorema

Se $u = g(x)$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo I e f for continua em I então

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du$$

Este teorema é uma consequência imediata da regra da cadeia:

$$\int F'(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int f(u)du$$

Como utilizar o teorema? $\int x.\cos(x^2+1)dx$. Vamos fazer $u = x^2 + 1$, então $du = 2xdx$. Isso implica: $xdx = \frac{1}{2}du$. Finalmente,

$$\int x.\cos(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)du$$

Mas agora $\frac{1}{2}\int \cos(u)du = \frac{1}{2}\text{sen}u + C = \frac{1}{2}\text{sen}(x^2+1) + C$.

9. $\int (1-2x)^9\,dx$

10. $\int (3t+2)^{2.4}\,dt$

11. $\int (x+1)\sqrt{2x+x^2}\,dx$

12. $\int \sec^2 2\theta\,d\theta$

13. $\int \frac{dx}{5-3x}$

14. $\int u\sqrt{1-u^2}\,du$

15. $\int \sin \pi t\,dt$

16. $\int e^x \cos(e^x)\,dx$

17. $\int \frac{e^u}{(1-e^u)^2}\,du$

18. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

19. $\int \frac{a+bx^2}{\sqrt{3ax+bx^3}}\,dx$

20. $\int \frac{z^2}{z^3+1}\,dz$

21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

22. $\int \cos^4\theta\,\sin\theta\,d\theta$

Regra da Substituição para integrais definidas:

Teorema

Se g' *for contínua em* $[a, b]$ *e* f *for contínua na variação de* $u = g(x)$ *então*

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Regra da Substituição para integrais definidas:

61. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \tan x)\, dx$

62. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \sin(\sin x)\, dx$

63. $\displaystyle\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

64. $\displaystyle\int_0^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

65. $\displaystyle\int_0^{a} x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

66. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \sin x\, dx$

67. $\displaystyle\int_1^{2} x\sqrt{x - 1}\, dx$

68. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$

69. $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

71. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^z + 1}{e^z + z}\, dz$

72. $\displaystyle\int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T - \alpha)\, dt$

Integração por partes

Derivada de um produto:

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

Ou, também:

$$f(x)g'(x) = [f(x).g(x)]' - f'(x).g(x)$$

Teorema (Regra de integração por partes)

Vamos supor que $f'(x).g(x)$ tem uma primitiva, então:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

Outra notação: podemos fazer $u = f(x)$ e $v = g(x)$, então $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ e

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplos: Integração por partes, integrais indefinidas

Exercício

Calcule:

1. $\int x.e^x dx$ *(Resp:* $e^x(x-1)+C$
2. $\int ln(x)dx$ *(Resp:* $x.ln(x) - x + C$*)*
3. $\int (lnx)^2 dx$ *(Resp:* $2x - 2x.ln(x) + x(ln(x))^2 + C$*)*
4. $\int x\mathrm{sen}x dx$ *(Resp:* $-x.\cos x + \mathrm{sen} x + C$ *)*

Integração por partes para integrais definidas

Teorema

Sejam f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a,b]$, então:

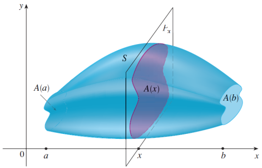
$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx$$

Exercício

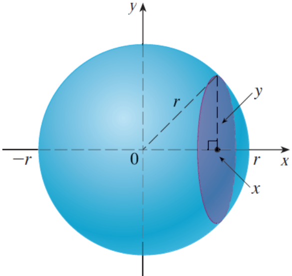
Calcule:

1. $\int_0^1 x.e^x dx$
2. $\int_0^{\pi/2} e^x.\cos x dx$
3. $\int_0^x t^2.e^{-st} dt$
4. $\int_1^2 \ln x dx$

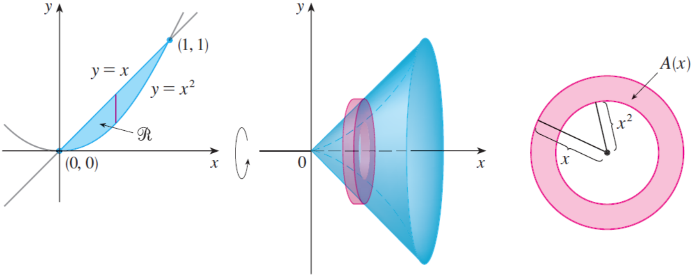
Ideia: cortar o objeto em cilindros de base $A(x)$ e altura dx, e depois fazer a soma $\int_a^b A(x)dx$, onde $A(x)$ é a área da secção transversal.



Exemplo da esfera de raio r: aqui $A(x) = \pi.y^2 = \pi.(r^2 - x^2)$.



São sólidos obtidos pela rotação de uma região ao redor de um eixo.
Método 1: método dos "anéis"



Aqui a área da secção transversal é simplesmente:

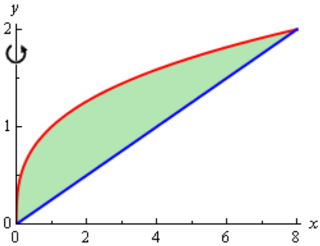
$$A(x) = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2 = \text{ area de um anel}$$

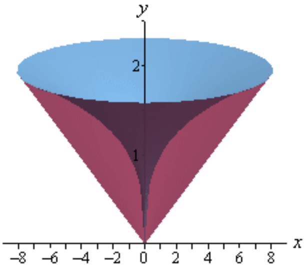
Exemplo:

Exercício

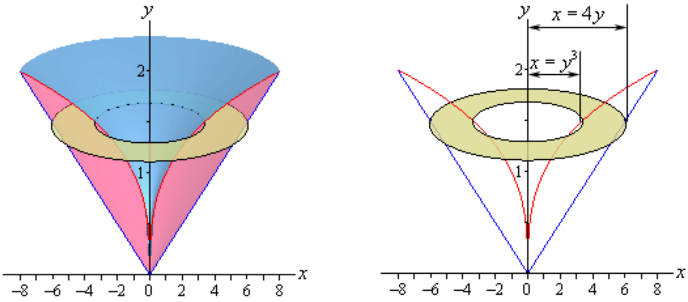
Determine o volume do solido obtido pela rotação da região S ao redor do eixo y. A região S é a região em $x \geq 0, y \geq 0$ entre os gráficos de $y = x/4$ e $y = \sqrt[3]{x}$

Região S:





Exemplo:



Secção transversal:

$$A(y) = \pi((4y)^2 - (y^3)^2) = \pi.(16y^2 - y^6)$$

Volume:

$$V = \int_0^2 A(y)dy = \pi.\int_0^2 16y^2 - y^6 dy = \pi.[\frac{16}{3}y^3 - \frac{1}{7}y^7]_0^2 = \frac{512}{21}\pi$$

Mais exemplos:

Exercício

Determine o volume do solido obtido pela rotação da região S ao redor da reta $y = 4$. A região S é a região entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2 - 2x$

Região S