# MAT 2110 : Cálculo para Química

## Aula 9/ Terça 18/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

# Resumo Aula 8

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Leis de continuidade :** Se $f, g$ são continuas, então $f+g, f-g, f.g$ são continuas.Também $f/g$, se $g(a) \neq 0$.
3. **Exemplos de continuidade:** funções polinômiais são continuas em $\mathbb{R}$, frações racionais são continuas onde o denominador é $\neq 0$ e $\sqrt{x}$ é continua em $[0, +\infty)$.
4. **Limites laterais:**

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ se e somente se } \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

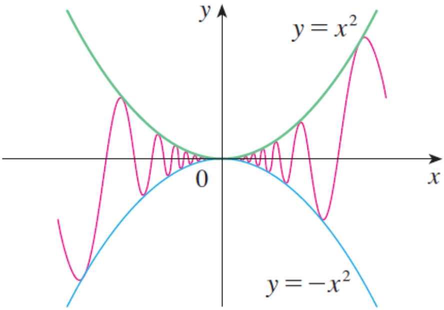
5. **Limites e desigualdades:**

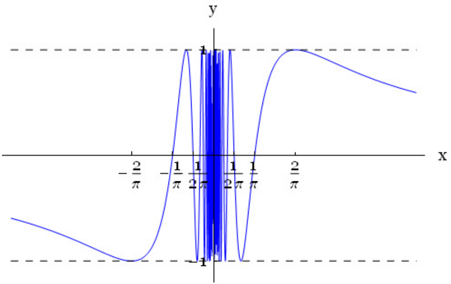
$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

6. **Teorema do Confronto:**

$$\Big(f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ e } \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L\Big) \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = L$$

# Limites e desigualdades III: Teorema do Sanduíche




## Exercício

*Mostrar* $\lim_{x\to 0} x^2.\cos(\frac{1}{x}) = 0$.

## Exercício

1. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ *não existe.*
2. *Mostrar* $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0$.

# Limites e funções compostas

## Teorema

*Sejam $f$ e $g$ duas funções tais que $Im(f) \subset Dom(g)$. Se $\lim_{x\to p} f(x) = a$ e $g$ contínua em $a$, então:*

$$\lim_{x\to p} g(f(x)) = \lim_{u\to a} g(u).$$

## Teorema (Caso mais utilizado)

*Sejam $f$ e $g$ duas funções tais que $Im(f) \subset Dom(g)$. Se $f$ for contínua em $p$ e $g$ contínua em $f(p)$, então a composta $h(x) = g(f(x))$ será contínua em $p$*

## Exercício

*Calcule*

1. $\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}}$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$ *(pode rationalizar ou fazer uma "mudança de variavel")*

# Limites e funções compostas: ''mudança de variavel''

**Situação:** suponhamos $g$ contínua em $a$, e

$$\boxed{g(u) \xrightarrow[u \to a]{} g(a) \text{ e também } f(x) \xrightarrow[x \to p]{} a}$$

então

$$\boxed{F(x) = g(f(x)) \xrightarrow[x \to p]{} g(a)}$$

## Exercício

1. *Seja $f$ definida em $\mathbb{R}$. Suponha que* $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. *Calcule*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(3x)}{x} \; e \; \lim_{x \to 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x - 1}.$$

2. *Calcule* $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x^2 - 1}$

# Limites e funções trigonométricas

## Teorema

*As funções* sen *e* cos *são contínuas.*

## Teorema

*Dois limites utéis:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \text{ e também } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

## Exercício

*Calcule:*

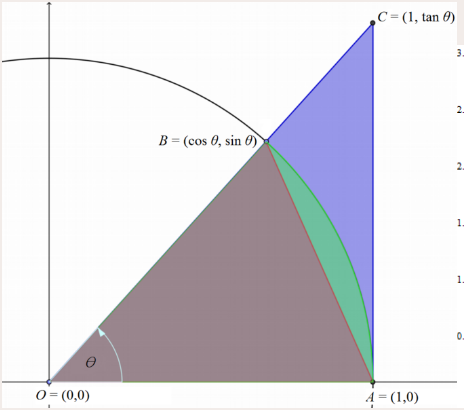
1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$.
4. $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x-2}$

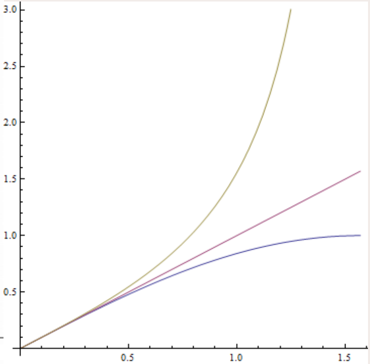
## Teorema

*Para* $0 < x < \pi/2$*:*

$$\mathrm{sen}x < x < \mathrm{tg}x.$$

## Demonstração



# Limites no infinito e limites infinitos

1. **Limites no infinito:**

**Definição**

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *significa: "eu posso fazer* $f(x)$ *arbitrariamente perto de* $L$*, tomando* $x$ *suficientemente grande."*

**Exemplos:** $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. **Leis do limite:** se $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1$ e $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_2$, então:

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1 + L_2 \text{ e também } f(x).g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1.L_2$$

3. **Lei do quociente:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{L_1}{L_2} \text{ se } L_2 \neq 0.$$

# Praticar com limites no infinito

## Exercício

15. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{2x+1}$

16. $\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^3-x+1}$

17. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x^2+1}$

18. $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3+6x^2-2}{2x^3-4x+5}$

19. $\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}+t^2}{2t-t^2}$

20. $\lim_{t\to\infty} \frac{t-t\sqrt{t}}{2t^{3/2}+3t-5}$

21. $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+1)^2}{(x-1)^2(x^2+x)}$

22. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

23. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

24. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

25. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$

26. $\lim_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)$

27. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

28. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}$

29. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-3x^2+x}{x^3-x+2}$

30. $\lim_{x\to\infty} (e^{-x}+2\cos 3x)$

31. $\lim_{x\to-\infty} (x^4+x^5)$

32. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^6}{x^4+1}$

# Limites infinitos

## Definição (Limites do tipo $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$)

*Suponhamos que exista a tal que* $]a, \infty) \subset Dom(f)$*. Definimos:*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *significa:*

   *para cada* $\epsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *com* $\delta > a$ *tal que* $x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *significa:*

   *para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *com* $\delta > a$ *tal que* $x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

## Definição

*Sejam* $p \in \mathbb{R}$ *e suponhamos que exista b tal que* $]p, b[\subset Dom(f)$*, então:*
$\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = +\infty$ *significa:*

*para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *com* $p + \delta < b$ *tal que* $p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.

# Limits no $\infty$ de polinomiais e frações racionais

## Exercício

$\lim_{x\to\infty} 4x^3 + 7x - 15.$

## Exercício

$\lim_{x\to-\infty} 3x^4 + 7x - 15.$

## Exercício

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+7x-15}{2x^2+8x+1}.$

## Exercício

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+7x-15}{2x^4+8x+1}.$

## Exercício

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+7x-15}{x^5+3x^2-1}.$

# Mais limites no infinito de frações racionais

**13.** $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

**14.** $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7}{x^3 - x^2 + x + 7}$

**15.** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

**16.** $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x^2 - 2}$

**17.** $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$

**18.** $g(x) = \dfrac{1}{x^3 - 4x + 1}$

**19.** $g(x) = \dfrac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$

**20.** $h(x) = \dfrac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$

**21.** $h(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

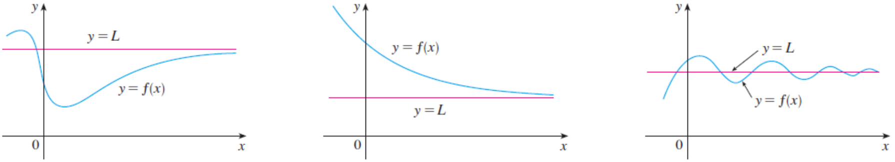
**22.** $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

**Assíntota horizontal:**

**Definição**

*A reta horizontal* $y = L$ *é chamada assíntota horizontal da curva* $y = f(x)$ *se ou*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$



# Assíntotas verticais

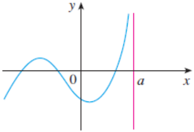
**Assíntota vertical:**

## Definição

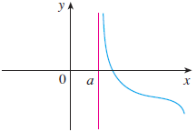
*A reta vertical $x = a$ é chamada assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

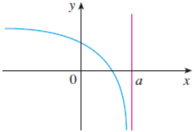
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$



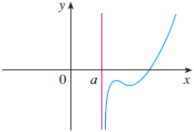

(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$




(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$




(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$




(d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

# Exemplos de assintotas

## Exercício

*Encontre as assíntotas horizontal e vertical de cada curva.*

$$y = \frac{2x + 1}{x - 2}$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$$

$$y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$$

$$y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$$

$$y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$$

# Variação: limites de frações com expoentes racionais

## Exercício

**23.** $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{8x^2-3}{2x^2+x}}$

**24.** $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2+x-1}{8x^2-3}\right)^{1/3}$

**25.** $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1-x^3}{x^2+7x}\right)^5$

**26.** $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-5x}{x^3+x-2}}$

**27.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$

**28.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

**29.** $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$

**30.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}}$

**31.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}}$

**32.** $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4}$

**33.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

**34.** $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

**35.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x-3}{\sqrt{4x^2+25}}$

**36.** $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4-3x^3}{\sqrt{x^6+9}}$

# Como trabalhar com limites infinitos: somas e produtos

**Somas:**

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
3. $L + (+\infty) = +\infty$, se $L \in \mathbb{R}$
4. $L + (-\infty) = -\infty$, se $L \in \mathbb{R}$

**Produtos:**

1. $(+\infty).(+\infty) = +\infty$
2. $(-\infty).(-\infty) = +\infty$
3. $(-\infty).(+\infty) = -\infty$
4. $L.(+\infty) = +\infty$, se $L > 0$
5. $L.(+\infty) = -\infty$, se $L < 0$
6. $L.(-\infty) = -\infty$, se $L > 0$
7. $L.(-\infty) = +\infty$, se $L < 0$

**Indeterminações:**

$$+\infty - (+\infty), -\infty - (-\infty), 0.\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}.$$

# Limites of differences: como tratar $\infty - \infty$

**Exemplos:**

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4}\right)$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3} + x\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2+3x-2}\right)$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2-x} - 3x\right)$$

# Como trabalhar com limites infinitos: quocientes

## Teorema

*Suponha que* $\lim_{x\to p^+} = 0$ *e que existe* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para* $p < x < p + r$*. Então:*

$$\lim_{x\to p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

**Exemplo (importante):** Para qualquer numero racional $r = \frac{p}{q} > 0$ temos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

## Exercício

$\lim_{x\to 2^-} \frac{-4}{x+2}$

## Exercício

$\lim_{x\to 4^-} \frac{3}{(4-x)^3}$ e $\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{(x-3)}$