MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 6/ Terça 11/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 5

1. **Meu site:** tem as notas de aulas + 1 lista de exercicios (para praticar, não é necessario de entregar para mim) `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Segundo encontro com limites:** definição rigorosa de $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ como:

Definição

" $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ " $\Leftrightarrow$ para qualquer numero M, existe um numero N tal que $f(x) > M$ sempre que $x > N$.

3. **Funções potência** $x \mapsto x^\alpha$
4. **Demonstração por indução**

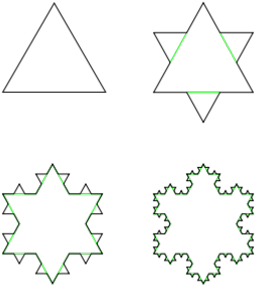
Exercício

Mostrar que para todos inteiros $n \geq 1$ temos que $2^n \geq n$.

5. **Demonstração de** $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ quando $a > 1$.

Aplicação: $\lim_{x\to\infty} \frac{4}{3}^x = \infty$: o floco de neve de von Koch

Construção: começar com um triangûlo equiláteral, e colocar 3 pequenos novos triangûlos de tamanho (1/3) do tamanho inicial. Continuar.



Exercício

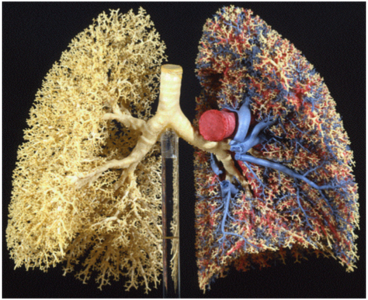
Mostrar que o perímetro P_n é tal que $\lim_{n\to\infty} P_n = +\infty$.

Aplicação II

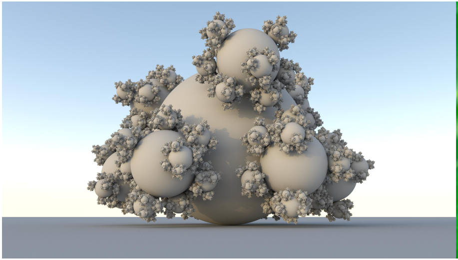
Demonstração

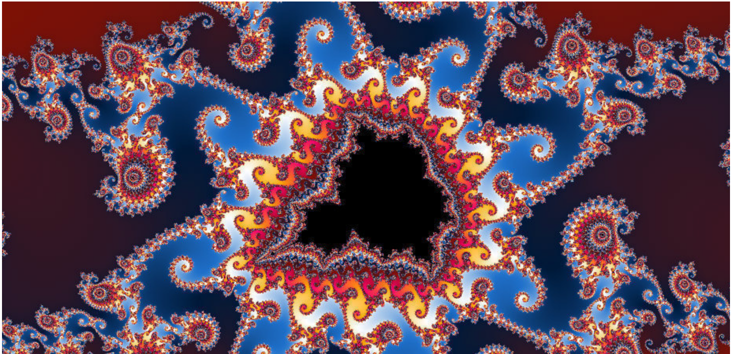
O número total de segmentos é $N_n = 4^n.N_0 = 4^n.3$ *(porque?). O comprimento de cada segmento é* $L_n = \frac{L_{n-1}}{3} = \frac{L_0}{3^n}$. *Então* $P_n = N_n.L_n = 3L_0.\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$

Observação 1: a area é limitada.
Observação 2:este tipo de objeto é chamado objeto fractal.



Mais fractais





Limites: que significa $\lim_{x \to a} f(x) = L$?

Como ler: "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L. Ou, também $f(x)$ tende a L quando x tende a a.
Outra notação: $f(x) \to L$ quando $x \to a$.
Def. intuitiva 1: "eu posso fazer $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, tomando x suficientemente próximo de a.
Def. intuitiva 2: "a distância entre $f(x)$ e L pode ser arbitrariamente pequena, tomando-se a distância de x a a suficientemente pequena (mas não igual a 0)".

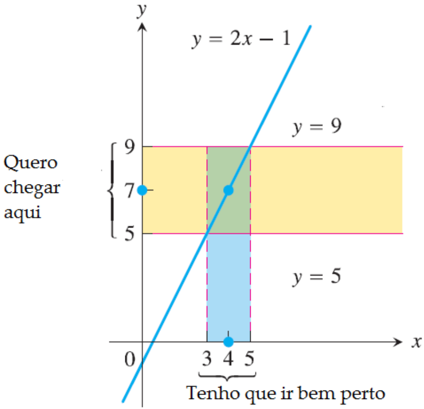
Definição

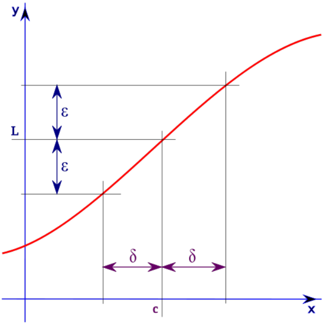
Seja f ua função definida sobre um intervalo aberto que contém a, exceto possivelmente no ponto a. A frase $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa: para todo número $\epsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Exercício

Mostrar que $\lim_{x \to 0} x^2 + 1 = 1$. *Mostrar que* $\lim_{x \to 2} 4x + 2 = 6$.

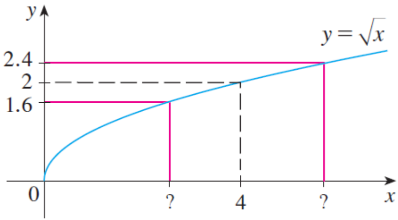




Exemplos

Exercício

Escrever um δ tal que $|x-4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-2| < 0,4$



Exercício

Prove cada proposição usando a definição de limite (isto é os ϵ, δ).

19. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2 + 4x}{3} = 2$

20. $\lim_{x \to 10} \left(3 - \frac{4}{5}x\right) = -5$

21. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

22. $\lim_{x \to -1.5} \dfrac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

23. $\lim_{x \to a} x = a$

24. $\lim_{x \to a} c = c$

25. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

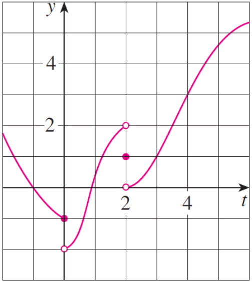
28. $\lim_{x \to -6^+} \sqrt[8]{6 + x} = 0$

29. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 7) = 1$

Limites laterais: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

Lido como: "o limite esquerdo de $f(x)$ quando x tende a a. Também: o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda.



Exercício

Escrever a definição rigorosa do limite esquerdo e direito.

Observação

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ *se e somente se* $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

Leis do limite

Teorema

Seja c uma constante e suponha que existam os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a} g(x)$*, então:*

1. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3. $\lim\limits_{x\to a} [cf(x)] = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ if $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Exemplos

Exercício

Calcule o limite se existir:

3. $\lim_{x \to 3} (5x^3 - 3x^2 + x - 6)$

4. $\lim_{x \to -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t \to -2} \frac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x \to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t \to 2} \left(\frac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5} \right)^2$

9. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

Exercício

Calcule o limite se existir:

11. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$

12. $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

13. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

14. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{t \to 1} \dfrac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim_{u \to 2} \dfrac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

Exemplos 2

Exercício

Calcule o limite se existir:

23. $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t}$

26. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t}\right)$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t}\right)$

30. $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{x^2+9} - 5}{x+4}$

31. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

32. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$