MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 5/ Segunda 10/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

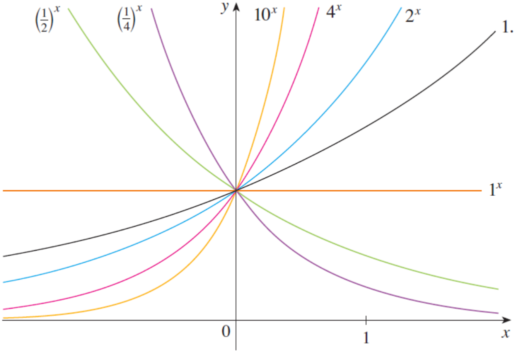
Resumo Aula 4

1. **Meu site:** tem as notas de aulas + 1 lista de exercicios (para praticar, não é necessario de entregar para mim) `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Funções compostas:** notação $g \circ f(x) = g(f(x))$, dominio de $g \circ f$.
3. **Funções exponenciais:** como definir a^x quando $x \in \mathbb{R}$, propriedades.
4. **Primeiro encontro com limites :** "Cada seqüência de numeros reais, crescente e limitada tem um limite".
5. **Segundo encontro com limites:** definição rigorosa de $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ como:

Definição

" $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$*" $\Leftrightarrow$ para qualquer numero M, existe um numero N tal que $f(x) > M$ sempre que $x > N$.*

Primeiras propriedades das funções exponenciais



Conclusão: para cada $a > 0$, existe uma função $x \mapsto a^x$.

Exponencial II: propriedades

Teorema (Lei dos expoentes)

Se a e b forem números positivos e x e y, números reais quaisquer, então:

$$a^{x+y} = a^x a^y \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

Definição de e^x: o número $e = 2,718\ldots$ é o unico tal que a função e^x tem uma reta tangente de inclinação $m = 1$ no ponto $(0,1)$.
Historia: primeira definição de e: como limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (demonstração de Bernoulli em 1680).
Observação: na verdade é possivel mostrar que a seqüência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada por 3, isto é: para cada $n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$.

Exponencial III: propriedades

Teorema

1. *Se* $a = 1$ *então* $a^x = 1^x = 1$ *para cada* $x \in \mathbb{R}$,
2. *Se* $a > 1$ *então* $x \mapsto a^x$ *é estritamente crescente (isto é:* $x < y \Rightarrow a^x < a^y$*), e* $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$*, e* $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.
3. *Se* $a < 1$ *então* $x \mapsto a^x$ *é estritamente decrescente (isto é:* $x < y \Rightarrow a^x > a^y$*), e* $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$*, e* $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
4. *Para todos* $a > 0$, $x \mapsto a^x$ *é uma função continua.*

Definição

A notação

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

(lida como "o limite de $f(x)$ *quando* x *tende a infinito é o infinito") significa: para qualquer numero* M*, existe um numero* N *tal que* $f(x) > M$ *sempre que* $x > N$.

Exponencial IV

Na verdade ja podemos demostrar tudo! Por exemplo:

Demonstração

(2) Para inteiros $N_1 < N_2$, temos que $a^{N_1} < a^{N_2}$, e também $a^{1/N_1} < a^{1/N_2}$. Então se $x < y$ (e x, y são racionais) temos que $a^x < a^y$. Depois no caso geral, quando x, y são reais, é suficiente encontrar numeros racionais $u < v$ tais que $x < u < v < y$ e mostrar

$$a^x < a^u < a^v < a^y.$$

Demonstração de $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ se $a > 1$

Lema (Bernoulli)

Se $h \in \mathbb{R}$ e $h > 0$, $q \in \mathbb{N}, q \neq 0$ temos que

$$(1+h)^q \geq 1 + qh$$

Demonstração (por indução)

Vamos denotar $P(k)$ a proposição (isto é, a frase matematica): para todos $h > 0$, $(1+h)^k \geq 1 + hk$.

1. **Initialização: caso** $q = 1$*: a proposição é verdadeira porque* $(1+h)^1 = 1 + h \geq 1 + h$.
2. **Passo indutivo:**$P(k) \Rightarrow P(k+1)$ *vamos supor que para todos* $h > 0$, $(1+h)^k \geq 1 + hk$ *é verdadeiro e mostrar que para todo* $h > 0$, $(1+h)^{k+1} \geq 1 + h(k+1)$. *Mas isso é facil porque:*

$$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) \geq (1+hk)(1+h)$$

$$\text{também } (1+hk)(1+h) = 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h$$

Fim da demonstração de $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ se $a > 1$

Lema

Se para todos $x \in \mathbb{R}$ temos que $f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, então:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Demonstração (do lema)

Para todos $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \geq M$ sempre que $x \geq N$. Mas $f(x) \geq g(x)$! então: Para todos $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$ sempre que $x \geq N$. Mas isto significa exatamente que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$...

Fim da demonstração: Lembra: queremos mostrar que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ (se $a > 1$). Mas podemos escrever $a = 1 + h$ e $K = E(x)$ (onde $E(x)$ é a parte inteira de x).
Ja sabemos que $a^x = (1+h)^x \geq (1+h)^K \geq (1 + h.K)$

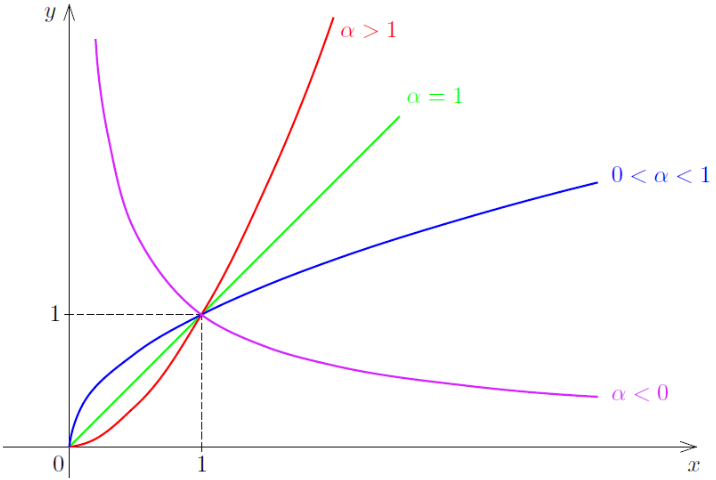
Fim da demonstração

Podemos terminar: para todo $M \in \mathbb{R}$, posso pegar N um inteiro maior que $\frac{M}{h}$. Então para todos $x \geq N$ tenho que $E(x) \geq N$ e também:

$$1 + h.E(x) \geq 1 + h.N \geq h.\frac{M}{h} = M.$$

Então ja mostremos que $g(x) = 1 + h.E(x)$ é tal que $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.
Mas $a^x \geq g(x)$.
Conclusão:$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, quando $a > 1$.

Gráfico:



Exemplos: Frequencia cardiaca e Taxa metabólica basal

Exemplo de função potência:

$$Freq.Card. = K.(Peso)^{-1/4}$$

(passarinho: 800 , rato: 250-450 pulsações, humano : 60-100 (mas ciclista M. Indurain tem 28 ...), cavalo:30)

Definição

A TMB (" Taxa metabólica basal") é a quantidade de energia produzida cada dia por um animal .

Definição (Lei de Kleiber)

$TMB = M^{3/4}$, *onde M é a massa do animal.*

Limites: que significa $\lim_{x\to a} f(x) = L$?

Como ler: "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L. Ou, também $f(x)$ tende a L quando x tende a a.
Outra notação: $f(x) \to L$ quando $x \to a$.
Def. intuitiva 1: "eu posso fazer $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, tomando x suficientemente próximo de a.
Def. intuitiva 2: "a distância entre $f(x)$ e L pode ser arbitrariamente pequena, tomando-se a distância de x a a suficientemente pequena (mas não igual a 0)".

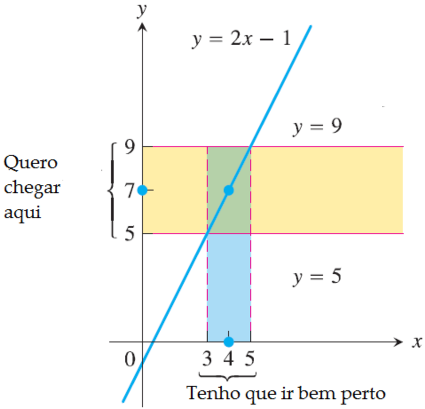
Definição

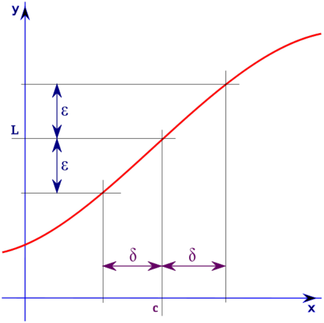
Seja f ua função definida sobre um intervalo aberto que contém a, exceto possivelmente no ponto a. A frase $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa: para todo número $\epsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Exercício

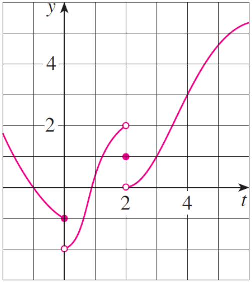
Mostrar que $\lim_{x\to 0} x^2 + 1 = 1$. *Mostrar que* $\lim_{x\to 2} 4x + 2 = 6$.





Limites laterais: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

Lido como: "o limite esquerdo de $f(x)$ quando x tende a a. Também: o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda.



Exercício

Escrever a definição rigorosa do limite esquerdo e direito.

Observação

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ *se e somente se* $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

Leis do limite

Teorema

Seja c uma constante e suponha que existam os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a} g(x)$*, então:*

1. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} [cf(x)] = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad \text{if } \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Exemplos

Exercício

Calcule o limite se existir:

11. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2-6x+5}{x-5}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x+6}{x-5}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

15. $\displaystyle\lim_{t\to -3} \frac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+3x+1}{x^2-2x-3}$

17. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(-5+h)^2-25}{h}$

18. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^3+8}$

20. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^4-1}{t^3-1}$

21. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+h}-3}{h}$

22. $\displaystyle\lim_{u\to 2} \frac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$

Exemplos 2

Exercício

Calcule o limite se existir:

23. $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

25. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$

26. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right)$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

28. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

29. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)$

30. $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

31. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

32. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$