MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 34/ Segunda 09/06/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 32

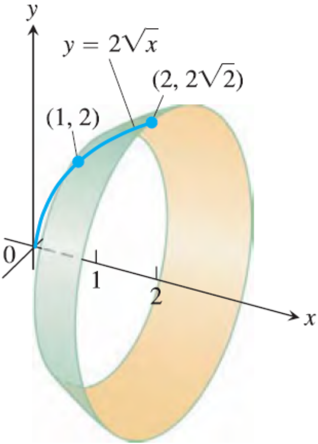
1. **Prova:** P2 na terça 10/06.
2. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html` No site, tem agora mais: a revisão e algumas respostas (da revisão).
3. Comprimento de gráfico
4. Área de uma superfície de revolução: rotação ao redor do eixo y
5. **Integrais improprias**

Exemplos: Área de uma superfície de revolução

Exercício

Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo x:

$$y = 2\sqrt{x}, 1 \leq x \leq 2.$$



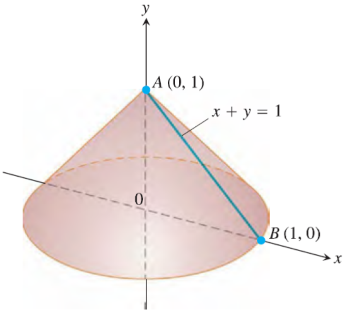
Área de uma superfície de revolução: rotação ao redor do eixo y

Área total da superfície de revolução:

$$S = \int_a^b 2\pi g(y).\sqrt{1 + (g'(y))^2}dy$$

Exercício

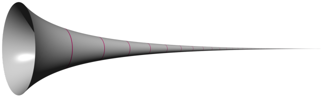
Cone obtido pela rotação de $x = 1 - y, 0 \leq y \leq 1$*, ao redor do eixo* y.



Trombeta de Gabriel

Definição

A trombeta de Gabriel (=do anjo Gabriel) é a superfície de revolução obtida pela rotação da curva $y = \frac{1}{x}$, com $x \in [1, \infty)$ ao redor do eixo x.



Volume do solido de revolução:

$$V = \int_1^{+\infty} \pi.\left(\frac{1}{x^2}\right) dx := \pi.\lim_{r\to\infty} \int_1^r \pi.\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Mas isso é:

$$= \pi.\lim_{r\to\infty} [-1/x]_1^r = \pi.\lim_{r\to\infty} (1 - \frac{1}{r}) = \pi.$$

Área da superfície de revolução:

$$A = 2\pi \int_1^r \frac{1}{x}.\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^r \frac{1}{x} dx = 2\pi \ln r \to \infty!$$

Integrais impróprias

Definição

Se $\int_a^t f(x)dx$ *existe para todo* $t \geq a$ *então:*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

desde que o limite exista (como um número, finito). Neste caso, a integral imprópria $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *é chamada convergente.*

Exercício

Mostrar que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$ *é convergente se* $p > 1$ *e divergente se* $p \leq 1$.

Integrais impróprias, segundo tipo

Definição

Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

se esse limite existir (como um número real finito), e a integral imprópria é chamada convergente (divergente, se não).
Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

se esse limite existir (como um número real finito).
Se f tiver uma descontinuidade em c, com $a < c < b$ e $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ forem convergentes, então podemos definir: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Teorema de comparação para as integrais impróprias

Teorema

Vamos supor que f e g são contínuas com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$.

1. *Se $\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente, então $\int_a^\infty g(x)dx$ é convergente.*
2. *Se $\int_a^\infty g(x)dx$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x)dx$ é divergente também.*

Exercício

Mostrar que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Exemplos

Exercício

Calcule:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$

2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.001}}$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

5. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$

6. $\displaystyle\int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{r^{0.999}}$

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^2 \frac{2\,dx}{x^2+4}$

Exercício

Convergente ou divergente?

41. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin t}$

42. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t - \sin t}$ ($t \geq \sin t$ $t \geq 0$)

43. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{1 - x^2}$

44. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{1 - x}$

45. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln |x| dx$

46. $\displaystyle\int_{-1}^{1} -x \ln |x| dx$

47. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$

48. $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$

49. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v - 1}}$

50. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{1 + e^{\theta}}$

51. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 1}}$

52. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

53. $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\sqrt{x + 1}}{\quad} dx$

54. $\displaystyle\int^{\infty} \frac{x\, dx}{\quad}$