MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 32/ Segunda 02/06/2014

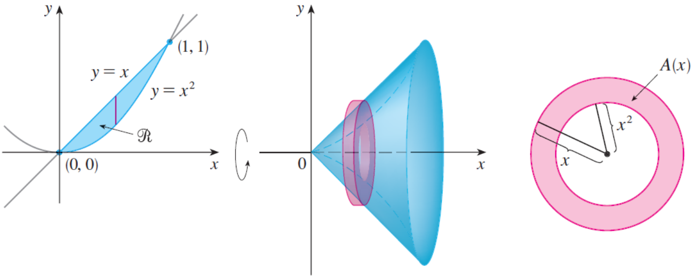
Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 31

1. **Prova:** P2 na terça 10/06.
2. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html` No site, tem agora mais: Lista 6 (Integrais, parte 1, com Respostas) e Lista 7 (Integrais parte II, com respostas)
3. **Lista 5, ex. 3a:** errado...
4. **Lista 4:** alguem perguntou, mas o ex. 6f está correto.
5. **Integração por partes**
6. **Volumes dos sólidos de revolução:** método dos anéis.
7. **Com o computador:** symbolab.com

São sólidos obtidos pela rotação de uma região ao redor de um eixo.
Método 1: método dos "anéis"



Aqui a área da secção transversal é simplesmente:

$$A(x) = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2 = \text{ area de um anel}$$

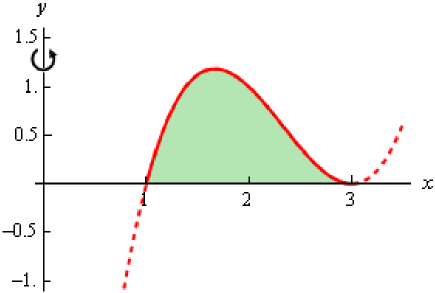
Volume:

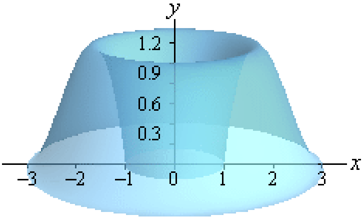
$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Exercício

Determine o volume do solido abaixo, onde $y = (x-1)(x-3)^2$

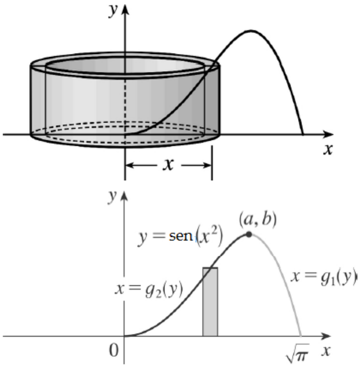
Região S





Exercício

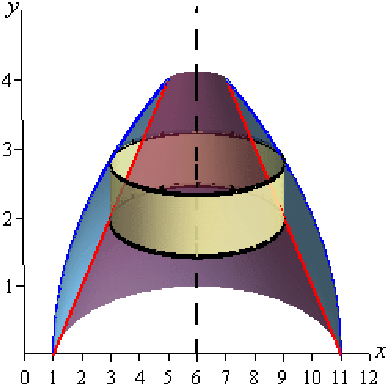
Determine o volume do solido abaixo, onde as duas curvas são $y = 0$ *e* $y = \operatorname{sen}(x^2)$.

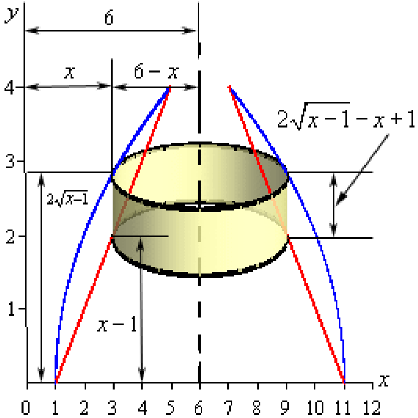


Exercício

Determine o volume do solido abaixo, onde as duas curvas são $y = (x - 1)$ *e* $y = 2\sqrt{x-1}$.

Região S



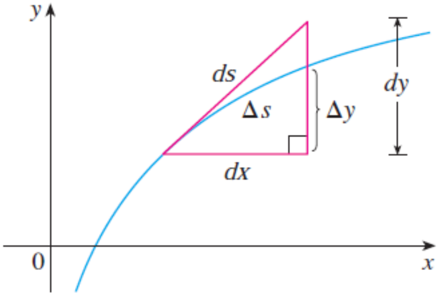


Formula do comprimento:

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Porque? Para um pedaço de gráfico, o comprimento é

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



Exercício

Calcule o comprimento do gráfico da função dada:

1. $y = (2/3)x^{3/2}$ *para* $0 \leq x \leq 1$ *(Resp:* $(2/3)(2\sqrt{2} - 1)$*).*
2. $y = x^3$ *para* $0 \leq x \leq 2$*;*

Comprimento de curva em forma paramétrica

Isso significa que a curva é dada como:

$$x = x(t) \text{ e } y = y(t),$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções de um paramétro $t \in I$.
Exemplos: parabola $x(t) = t, y(t) = t^2$. Circulo: $(\cos t, \operatorname{sen} t)$.

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Comprimento da circunferência de raio R.

Exercício

Calcule o comprimento da curva dada em forma paramétrica:

1. $x = 3t$ *e* $y = 2t^{3/2}$, $0 \leq t \leq 1$.
2. $x = 2t + 1$ *e* $y = t - 1$, $1 \leq t \leq 2$.

Área de um semicirculo de raio 1:

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

Podemos fazer $x = \text{sen} u$, então $\cos(u) = \sqrt{1-x^2}$ e $dx = \cos(u)du$.
Assim podemos obter: (lembra que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)\cos(u)du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos(2u))/2du = \pi/2$$

Exercício

Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Ja sabemos o resultado arc* $-\ \text{sen}(x) + C$, *mas aqui podemos fazer a substituição* $x = \text{sen}(u)$.

Exercício

Fazer $x = tg(u)$ *para calcular* $\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{1+x^2}}$.

Mais exemplos

Exercício

Antiderivada de $1/\mathrm{sen}x$**:** *Fazer* $u = \mathrm{tg}(x/2) \Rightarrow x = 2tg^{-1}(u)$ *e* $dx = 2du/(1+u^2)$*. Agora* $1+u^2 = 1/(\cos(x/2))^2$ *e* $\frac{2u}{1+u^2} = \mathrm{sen}x$*. Fazer agora a substituição.*

Observação: a mudança $u = tg(x/2)$ é muito util:

1. mostrar que $dx = \frac{2du}{1+u^2}$
2. mostrar que $\mathrm{sen}x = \frac{2u}{1+u^2}$
3. mostrar que $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Conclusão: cada fração racional com cos , sen pode ser escrita como uma fração racional normal, em u!

Mais exemplos

Exercício

Calcule as antiderivadas:

1. $\int \sqrt{1-4x^2}dx$
2. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$
3. $\int \frac{dx}{1+\text{sen}x}$ *(fazer* $u = tg(x/2)$*).*
4. $\int \frac{1}{\cos x}dx$

Área de uma superfície de revolução