

MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 3/ Sexta 28/02/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

1 Informações gerais:

- **Site:** ver o link para MAT 2110 na pagina <http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html>
-

2 **Desigualdades:** algumas regras, resolver $3x + 7 < 0$, $x^2 + 2x - 8 \geq 0$ (idéia: escrever como um produto de fatores).

3 **Combinação de algumas desigualdades:** exemplo:

$$\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 35x + 26y \geq 70\}$$

4 **Valor absoluto:** significação de $|x - a| < 3, \dots$

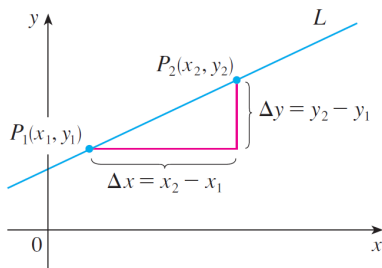
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

5 **Equação geral de uma reta:** $\{(x, y) \mid Ax + By + C = 0\}$.

Retas e funções lineares

Inclinação de uma reta não vertical que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



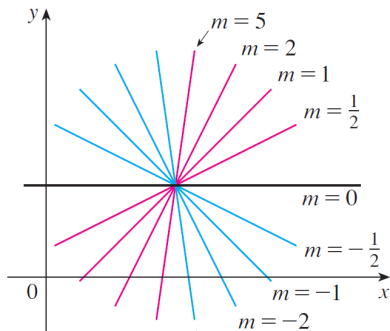
Equação de uma reta passando pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$ com inclinação m :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Exercícios

Equação mais geral de uma reta:

$$Ax + By + C = 0$$



Exercício

Mostrar que se os interceptos x e y de uma reta são os números a e b ($\neq 0$), então a equação da reta pode ser escrita como:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Encontrar a equação de uma reta cujo intercepto x é 6 e cujo intercepto y é -8 .

Tudo sobre as equações quadráticas

Equação quadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Teorema

As soluções são:

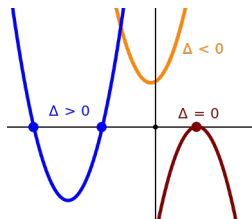
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Observação 1:** quando o **discriminante** $D = b^2 - 4ac$ é igual a 0, so tem uma solução única $x = -\frac{b}{2a}$.
- **Observação 2:** quando o **discriminante** $D = b^2 - 4ac < 0$, não existem soluções reais.
- **Observação 3:** quando o **discriminante** $D = b^2 - 4ac > 0$, existem duas soluções (também chamados "zeros" ou "raízes") reais distintas x_1, x_2 .

Geometria da equação quadrática

Porque? Explicação simples ("complemento de quadrados"):

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$



Caso com 2 soluções: podemos fatorar $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ como:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Teorema

A soma das raízes é $-b/a$ e o produto das raízes é c/a .

Exercício

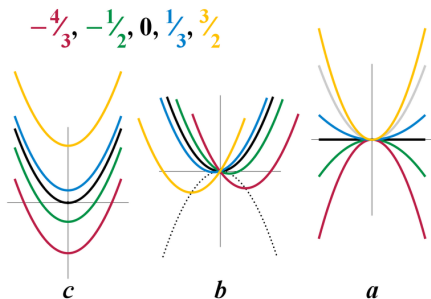
Discutir o caráter das raízes na equação quadrática:

$$9x^2 - (m - 3)x + 1 = 0$$

Equação quadrática

Exercício

Resolver $y^4 - y^2 = 12$. Resolver $u - 2\sqrt{u} = 3$.



Exercício

Determinar o valor de x tal que $3x^2 + 2x + 3$ é mínimo.

Definição

Um polinômio é uma função do tipo:

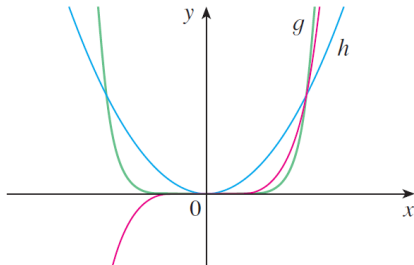
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

onde os **coeficientes** a_1, \dots, a_n são constantes.

Exemplos: $P(x) = mx + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = 5x^3 - 3x + 2$.

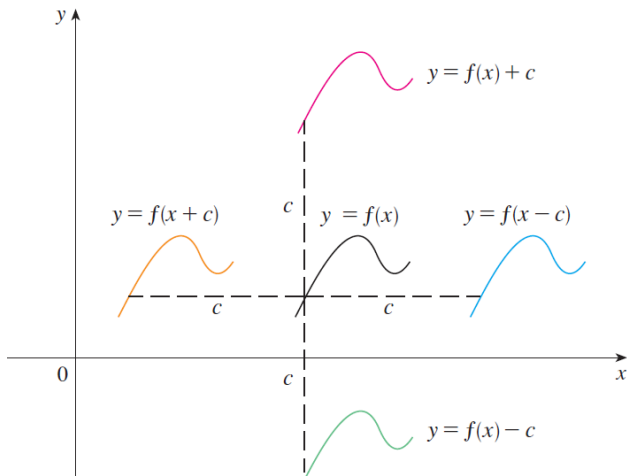
Grau: o maior n tal que $a_n \neq 0$ é chamado o grau do polinômio.

Associe cada equação a seu gráfico: $y = x^2$, $y = x^5$, $y = x^8$



Transformações de gráficos: translações

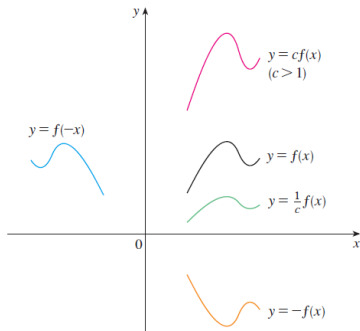
Translações: para cima, para baixo, para esquerda, para direita



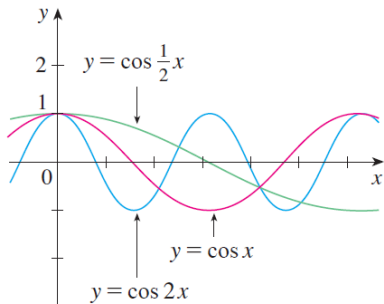
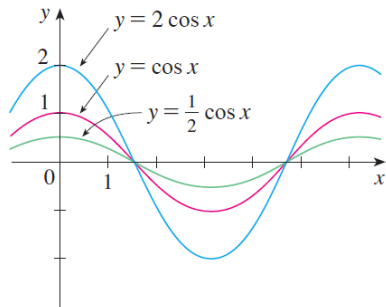
Transformações de gráficos: esticamento e reflexão

Esticamento e reflexão: suponha $c > 1$

- 1 $y = cf(x)$ estique o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
- 2 $(1/c)f(x)$ comprima.
- 3 $f(cx)$ comprima horizontalmente.
- 4 $f(x/c)$ estique horizontalmente por um fator de c ,
- 5 $-f(x)$ reflita o gráfico em torno do eixo x
- 6 $f(-x)$ reflita em torno do eixo y .



Exemplos de esticamentos: com a função co-seno / Aplicação



Exercício

Demonstrar que o gráfico de qualquer função quadrática pode ser obtido a partir do gráfico de $y = x^2$ com translações, esticamentos e reflexões.

Definição

Uma elipse E é um conjunto do plano dado por:

$$E = \left\{ (x, y) \mid \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1 \right\}$$

Exercício

Como obter a elipse E a partir de um círculo?

Observação: Área de uma elipse.

Exemplos II

Exercício

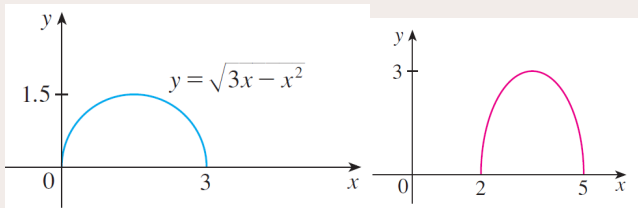
Esboce o gráfico de $x^2 + 10x + 27$.

Exercício

Esboce o gráfico de $|x^3 - 2x|$.

Exercício

O gráfico de $y = \sqrt{3x - x^2}$ é dado. Use as transformações para criar uma função cujo gráfico é mostrado.



Função composta

Imagem de f : lembra que a imagem de f é $Imf = \{f(x) \mid x \in D_f\}$.

Definição

Sejam f e g duas funções tais que $Imf \subset D_g$, então a função dada por

$$y = g(f(x)), x \in D_f$$

é chamada função composta de g e f , e é denotada por $g \circ f$.

Pergunta: $g \circ f = f \circ g$? ou não?

Exercício

Determine $g \circ f$ e $f \circ g$ para $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$.

Encontre as funções $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ e seus domínios

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = x - 2, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$$

$$f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = \cos x$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$$

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}, \quad g(x) = \sin 2x$$

Encontre as funções $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ e seus domínios

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = x - 2, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$$

$$f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = \cos x$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$$

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}, \quad g(x) = \sin 2x$$

Funções Exponenciais: introdução e algumas propriedades

- **Caso mais simples:** para n um inteiro \geq , e a um número real:

$$a^n = a.a \dots a \text{ (n vezes)}$$

- **Caso 2:** seja $n > 0$ inteiro, $a \in \mathbb{R}$: vamos definir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

- **Caso a^x onde $x = \frac{p}{q}$ é racional:** vamos simplesmente definir:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

Pergunta

Como definir a^x quando x é um número real?

Idéia: seja $x = x_0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$ (exemplo, $x = \pi = 3, 1415 \dots$). Os números 3, depois 3, 1, depois 3, 14, etc são todos racionais, então podemos considerar a_0^x , e depois a^{x_0, x_1} , e depois $a^{x_0, x_1 x_2}$. O que vai acontecer é que essa sequência vai ter um limite, que a gente vai denotar por a^x

Exemplo: Taxa metabólica basal

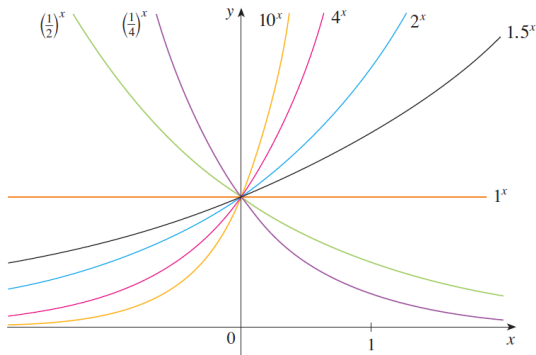
Definição

A TMB ("Taxa metabólica basal") é a quantidade de energia produzida cada dia por um animal .

Definição (Lei de Kleiber)

$TMB = M^{3/4}$, onde M é a massa do animal.

Primeiras propriedades das funções exponenciais



Teorema (Lei dos expoentes)

Se a e b forem números positivos e x e y , números reais quaisquer, então:

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$