MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 29/ Segunda 26/05/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 28

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html` No site, tem agora mais: Lista 5 (derivadas, com respostas) e Lista 6 (Integrais, parte 1, com Respostas)
2. **Cálculo de áreas**
3. **Movimento de uma particula**: deslocamento, espaço percorrido.
4. **Valor médio de f em $[a, b]$**

Valor Médio de uma função

Então podemos definir:

Definição

O valor médio da função f no intervalo $[a, b]$ é:

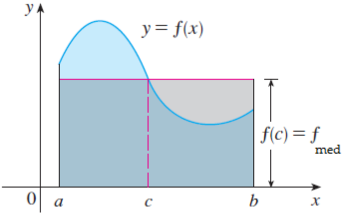
$$f_{med} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exercício

Encontre o valor médio da função no intervalo dado:

1. $f(x) = 1/x$, *em* $[1, 4]$
2. $g(x) = \sqrt{1+x^3}.x^2$ *em* $[0, 2]$

Valor Médio de uma função



Teorema

Se f é contínua em $[a, b]$ então existe um $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

Prova: O teorema do valor médio para $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ diz que existe $c \in (a, b)$ tal que $F(b) - F(a) = F'(c).(b-a)$. Mas agora, temos que $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Valor médio

Exercício

Se uma xicara de café tem uma temperatura de 95 graus, em uma sala cuja temperatura ambiente é de 20 graus. De acordo com a Lei de resfriamento de Newton, a temp. do café após t minutos será:

$$T(t) = 20 + 75e^{-t/50}$$

Qual é a temperatura média do café durante a primeira meia hora?

Exercício

Encontre c tal que $f(c) = f_{med}$ *para* $f(x) = (x-3)^2$ *em* $[2, 5]$

Integrais indefinidas

Definição

A integral indefinida de f é o conjunto de todas as antiderivadas de f. Ela é denotada por

$$\int f(x)dx.$$

Teorema

Para determinar $\int f(x)dx$, é suficiente de encontrar uma antiderivada F de f, e depois

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ onde } C \text{ é uma constante arbitraria.}$$

Tabela de antiderivadas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$$

Teorema

Se $u = g(x)$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo I e f for continua em I então

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du$$

Este teorema é uma consequência imediata da regra da cadeia:

$$\int F'(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int f(u)du$$

Como utilizar o teorema? $\int x.\cos(x^2+1)dx$. Vamos fazer $u = x^2 + 1$, então $du = 2xdx$. Isso implica: $xdx = \frac{1}{2}du$. Finalmente,

$$\int x.\cos(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)du$$

Mas agora $\frac{1}{2}\int \cos(u)du = \frac{1}{2}\text{sen}u + C = \frac{1}{2}\text{sen}(x^2+1) + C$.

Praticar com a regra da Substituição

9. $\int (1 - 2x)^9 \, dx$

10. $\int (3t + 2)^{2.4} \, dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2} \, dx$

12. $\int \sec^2 2\theta \, d\theta$

13. $\int \dfrac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int u\sqrt{1 - u^2} \, du$

15. $\int \sin \pi t \, dt$

16. $\int e^x \cos(e^x) \, dx$

17. $\int \dfrac{e^u}{(1 - e^u)^2} \, du$

18. $\int \dfrac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

19. $\int \dfrac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} \, dx$

20. $\int \dfrac{z^2}{z^3 + 1} \, dz$

21. $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x} \, dx$

22. $\int \cos^4\theta \sin\theta \, d\theta$

Algumas Respostas

9) $(-1/20)(1-2x)^{10}$
11) $(1/3)(x(2+x))^{3/2}$
14) $(-1/3)(1-u^2)^{3/2}$
21) $(ln(x))^3/3$

Regra da Substituição para integrais definidas:

Teorema

Se g' for contínua em $[a,b]$ e f for contínua na variação de $u = g(x)$ então

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Regra da Substituição para integrais definidas:

61. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \tan x)\, dx$

62. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos x \sin(\sin x)\, dx$

63. $\displaystyle\int_{0}^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

64. $\displaystyle\int_{0}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

65. $\displaystyle\int_{0}^{a} x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

66. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \sin x\, dx$

67. $\displaystyle\int_{1}^{2} x\sqrt{x - 1}\, dx$

68. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$

69. $\displaystyle\int_{e}^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

71. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^z + 1}{e^z + z}\, dz$

72. $\displaystyle\int_{0}^{T/2} \sin(2\pi t/T - \alpha)\, dt$

Integração por partes

Derivada de um produto:

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

Ou, também:

$$f(x)g'(x) = [f(x).g(x)]' - f'(x).g(x)$$

Teorema (Regra de integração por partes)

Vamos supor que $f'(x).g(x)$ tem uma primitiva, então:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

Outra notação: podemos fazer $u = f(x)$ e $v = g(x)$, então $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ e

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exercício

Calcule:

1. $\int x.e^x dx$ (*Resp:* $e^x(x-1)+C$
2. $\int ln(x)dx$ (*Resp:* $x.ln(x)-x+C$)
3. $\int (lnx)^2 dx$ (*Resp:* $2x-2x.ln(x)+x(ln(x))^2+C$)
4. $\int x\text{sen}x dx$ (*Resp:* $-x.\cos x+\text{sen}x+C$)

Integração por partes para integrais definidas

Teorema

Sejam f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a,b]$, então:

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx$$

Exercício

Calcule:

1. $\int_0^1 x.e^x dx$
2. $\int_0^{\pi/2} e^x.\cos x dx$
3. $\int_0^x t^2.e^{-st} dt$
4. $\int_1^2 \ln x dx$