MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 26/ Sexta 16/05/2014

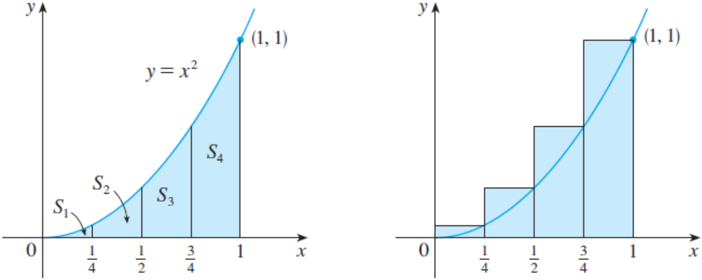
Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 25

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Regra de L'Hospital e exemplos**
3. **Integrais**

Ideia: como calcular a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$?
("dividir e aproximar")



Aproximar com retângulos:

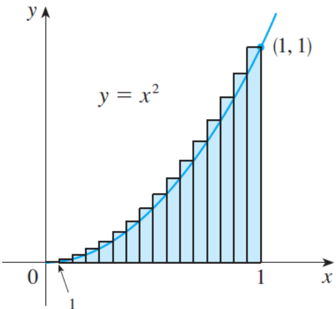
$$S_4 = \frac{1}{4}f(x_1^\star) + \frac{1}{4}f(x_2^\star) + \frac{1}{4}f(x_3^\star) + \frac{1}{4}f(x_4^\star)$$

Integral definida

Definição

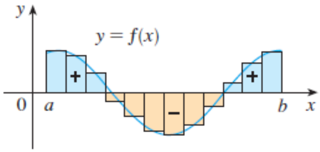
Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Podemos dividir $[a, b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1], \dots [x_{n-1}, x_n]$ de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Em cada $[x_{i-1}, x_i]$ vamos escolher um ponto amostral $x_i^\star$. Então a integral definida de f de a para b é:

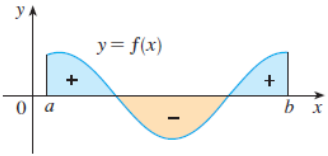
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$$



Propriedades da integral

Interpretação da integral: área líquida (=diferença das áreas)





Teorema

1. *Se* $f(x) \geq 0$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. *Se* $f(x) \geq g(x)$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3. *Se* $m \leq f(x) \leq M$ *para* $a \leq x \leq b$ *então*
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)$

Mais propriedades da integral

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a),$ onde c é constante

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

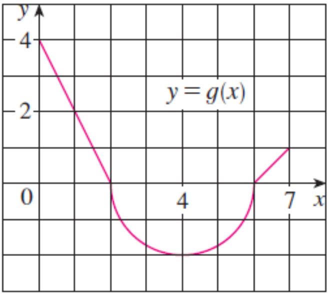
3. $\displaystyle\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$ onde c é constante

4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Exercício

O gráfico de g consiste em duas retas e um semicirculo. Use-o para calcular cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\,dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\,dx$



Mais exemplos

Exercício

Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade sem calcular as integrais:

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\, dx \geqslant 0$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx$$

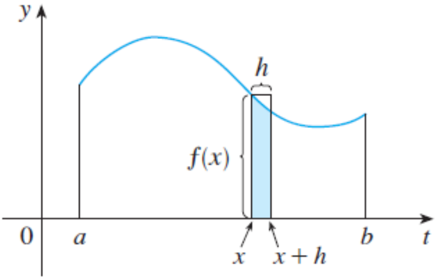
$$2 \leqslant \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\, dx \leqslant \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$$

Exercício

Mostrar $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

Teorema fundamental do cálculo



Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 1)

Se f for contínua em $[a, b]$ então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é continua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental do cálculo

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Agora o ultimo termo é quase como $h.f(x)$ então $F'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental do cálculo, parte 2

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 2)

Se f for contínua em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Prova: com $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, sabemos que $g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)dt$. Mas também sabemos que duas antiderivadas de f diferem por uma constante

$$F(x) = g(x) + C$$

então $F(b) - F(a) = (g(b) + C) - (g(a) + C) = \int_a^b f(t)dt$.

Praticar: calcule as derivadas

7. $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\, dt$

8. $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t}\, dt$

9. $g(s) = \int_5^s (t - t^2)^8\, dt$

10. $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\, dx$

11. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\, dt$

Praticar: calcule as derivadas

12. $G(x) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}\, dt$

13. $h(x) = \int_1^{e^x} \ln t\, dt$

14. $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4 + 1}\, dz$

15. $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\, dt$

16. $y = \int_0^{x^4} \cos^2\theta\, d\theta$

17. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1 + u^2}\, du$

18. $y = \int_{\sin x}^{1} \sqrt{1 + t^2}\, dt$

56. $g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t \sin t\, dt$

57. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\, dt$

58. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \arctan t\, dt$

59. $y = \int_{\cos x}^{\sin x} \ln(1 + 2v)\, dv$

Praticar: calcular a integral (se existe)

19. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\, dx$

20. $\int_{-1}^{1} x^{100}\, dx$

21. $\int_{1}^{4} (5 - 2t + 3t^2)\, dt$

22. $\int_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$

23. $\int_{1}^{9} \sqrt{x}\, dx$

24. $\int_{1}^{8} x^{-2/3}\, dx$

25. $\int_{\pi/6}^{\pi} \sin\theta\, d\theta$

26. $\int_{-5}^{5} e\, dx$

27. $\int_{0}^{1} (u + 2)(u - 3)\, du$

28. $\int_{0}^{4} (4 - t)\sqrt{t}\, dt$

29. $\int_{1}^{9} \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$

30. $\int_{0}^{2} (y - 1)(2y + 1)\, dy$

31. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 t\, dt$

32. $\int_{0}^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

Praticar com integrais

Exercício

A função erro em probabilidade é dada por

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Mostar que $e^{x^2} erf(x)$ *satisfaz a equação diferencial*

$$y' = 2xy + \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Exercício

Determinar os intervalos de concavidade para

$$y = \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + t + 2} dt$$