MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 24/ Segunda 12/05/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 23

1. **Site:** http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html
2. **Teste da derivada segunda**
3. **Regra de L'Hospital**
4. **Problemas de otimização**

Resumo: a regra de L'Hôspital

Teorema

Vamos supor que f e g têm derivadas e que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ou } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

onde a pode ser um número real finito, $+\infty$ ou $-\infty$, então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Mais exemplos

Limites e Regra de L'Hospital:

* $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{1/x} = \lim_{x\to 1} -x = -1$

* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3 \operatorname{sen} 3x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{9\cos 3x}{4} = \frac{9}{4}$

* $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+4}{3x^2+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$ sem L'Hospital

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{6x+1} = \lim \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$

mais exemplos:

ⓐ $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+7x}{5x^2+11}$ (Resp. $\frac{3}{5}$)

ⓑ $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x}$ (Resp. 0)

ⓒ $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ (Resp. 0)

Outras formas indeterminadas

Forma indeterminada $0.\infty$

ex: $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x . \ln x^3}$ (escrever $x.\ln x$ como $\frac{\ln x}{1/x}$)

Praticar com: $\lim_{x\to\infty} x . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. (Resposta: 1)

$\lim_{x\to\infty} x . \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ (Resp. 1).

$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$

Como fazer? $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

estudar $\ln y = x . \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}$

e aplicar L'Hospital

Forma ∞^0

$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(e^x + x^2\right)^{2/x}}$

mesma ideia: tomar o logaritmo natural

(Resp. $= e^2$)

Problemas de otimização

Exercício

Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicirculo de raio r.

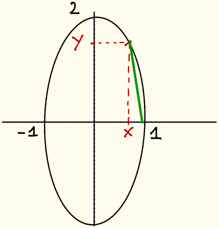
Exercício

Encontreo os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto $(1, 0)$.

Prova: Escrever o quadrado da distança $d^2 = (x-1)^2 + y^2$ como uma função de x e encontrar os pontos criticos e aplicar o teste da derivada segunda. Calcular também os valores em -1 e 1 (lembra que $x \in [-1, 1]$).

Exercício

Area do maior retângulo inscrito na elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.



(Dist.)^2 entre $(1,0)$ e (x,y) é $= (x-1)^2 + y^2$

mas: $4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - 4x^2$

então: $\underbrace{d^2}_{f(x)} = (x-1)^2 + 4 - 4x^2$

Agora: $f'(x) = 2(x-1) - 8x = -6x - 2$

núm. crítico: $-6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$.

$f''(x) = -6 < 0$

---

* Teste da derivada segunda: $-\frac{1}{3}$ é máximo local

---

* Vamos mostrar que $-\frac{1}{3}$ é máx. global:

$f: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, temos: $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 + 4 - 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{9} + \frac{36}{9} - \frac{4}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$.

$f(-1) = (-1-1)^2 + 4 - 4 = 4$

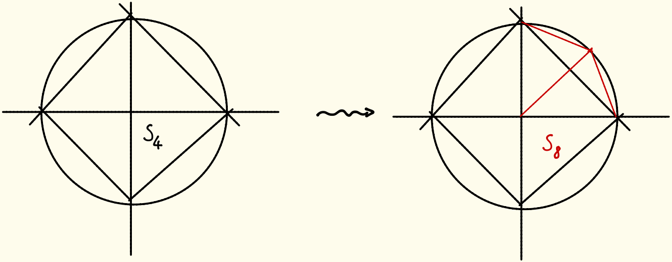
$f(1) = 0$.

Concl: $-\frac{1}{3}$ é o único máx. global.

Exercício

Maior volume de um cone de angulo α feito com um pedaço circular de papel, de raio R.

Problemas de area:



Pergunta: qual é o limite S_∞ da seq. S_n?