MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 23/ Sexta 09/05/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 22

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Teste da Primeira derivada**
3. **Teorema do valor médio**

Exercício

Mostre que $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |a - b|$

4. **Teste da derivada segunda**

Exercício

Mostre que 5 *é um número critico de* $g(x) = 2 + (x-5)^3$ *mas não tem um valor extremo local em 5.*

Exercício

Para quais valores de a e b $f(x) = axe^{bx^2}$ *tem o valor máximo* $f(2) = 1$

Mais exemplos

Exercício

Encontre $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *que tenha um valor max. local 3 em -2 e um valor min. local 0 em 1.*

Uso da derivada segunda II

Teorema (Teste da derivada segunda)

Suponha que f'' seja contínua perto de c.

1. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$ então f tem um mínimo local em c.*
2. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$ então f tem um máximo local em c.*

Derivadas e formas indeterminadas: a regra de L'Hôspital

Teorema

Vamos supor que f e g têm derivadas e que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ou } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

onde a pode ser um número real finito, $+\infty$ ou $-\infty$, então:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Como mostrar o teorema: caso facil onde f' é contínua: simplesmente observar que $f(x) \simeq f(a) + f'(a).(x-a)$ perto de a.

Exemplos

Exercício

Com a regra de L'Hôpital, estudar:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
2. $\lim_{t \to 1} \frac{5t^4 - 4t^2 - 1}{10 - t - 9t^3}$
3. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$
4. $\lim_{x \to 0^+} x . \ln x$ *(pensar: $f(x) = \frac{\ln x}{1/x}$!)*
5. $\lim_{x \to -\infty} x . e^x$ *(que tentar? $e^x / (1/x)$ ou x / e^{-x}?)*
6. *Mais complicado:* $\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$ *(do tipo ∞^0).*

Problemas de otimização

Exercício

Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicirculo de raio r.

Exercício

Encontreo os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto $(1, 0)$.

Prova: Escrever o quadrado da distança $d^2 = (x - 1)^2 + y^2$ como uma função de x e encontrar os pontos criticos e aplicar o teste da derivada segunda. Calcular também os valores em -1 e 1 (lembra que $x \in [-1, 1]$).

Exercício

Area do maior retângulo inscrito na elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

Exercício

Maior volume de um cone de angulo α *feito com um pedaço circular de papel, de raio* R.