MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 20/ Tera 29/04/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 19

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Sexta-Feira 02 de Abril:** não haverá aula (calendario USP).
3. **Equações diferenciais:** $y' = 0$ no intervalo (a, b) é equivalente à $Y(t) = constante$.
4. **Equações diferenciais:** resolução de $y' = ky$ e de $y' = ky + b$.
5. **Estudo da variação das funções**: Teorema do valor médio.
6. **Intervalos de crescimento e decrescimento:** $f'(x) > 0$ em (a, b) implica f estritamente crescente.

Exercício

Intervalos de crescimento e decrescimento para $x(t) = \frac{t}{1+t^2}$

Teorema

As soluções da equação $y' = k.y$ *num intervalo* (a, b) *são exatamente as funções*

$$y(t) = C.e^{kt}, \text{ onde } C \text{ é uma constante.}$$

Aplicação: decaimento radioativo

Radioatividade: Um núcleo de um átomo vai se desintegrar de maneira espontânea, emitindo radiações (exemplo: emissão alfa, isto é, de uma particula alfa= 2 prótons e 2 nêutrons).
Fato experimental: a taxa de transformação de núcleos radioativos é proporcional ao número de átomos dos núcleos. Aqui $N(t)$ é o número de particulas (função do tempo):

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda . N(t)$$

Resolução da equação:

$$N(t) = C.e^{-\lambda . t} = N_0 . e^{-\lambda . t}$$

"Vida média" de um elemento: é definida como $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$. E o tempo depois do qual a quantidade N de particulas se reduziu á metade. Isto é:

$$N(\tau) = \frac{N_0}{2}$$

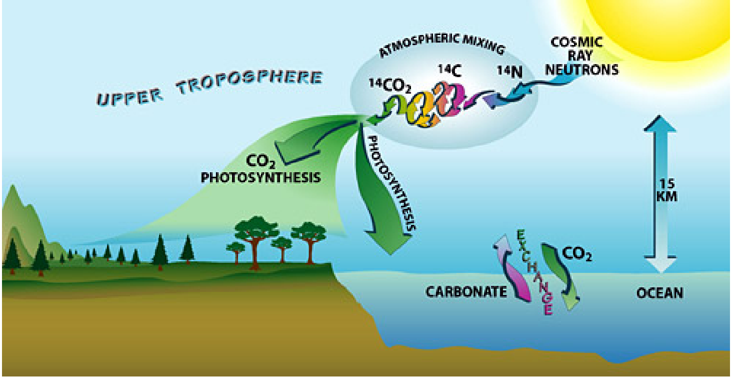
Decaimento II

Mas ja sabemos que: $N(\tau) = N_0.e^{-\lambda.\tau}$ então $N_0/2 = N_0.e^{-\lambda.\tau} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda.\tau}$. Podemos tomar o logaritmo natural:

$$\ln(1/2) = -\ln 2 = -\lambda.\tau \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Exemplos:para Carbono C^{14}, $\tau = 5730$ anos.

Fato 1: A atmosfera contem uma proporção constante de $14 - C$.



Fato 2: plantas vivas contem uma proporção constante de $14 - C$ radioativo.

$$\underset{\text{Carbon dioxide}}{6CO_2} + \underset{\text{Water}}{6H_2O} \xrightarrow{\text{Light}} \underset{\text{Sugar}}{C_6H_{12}O_6} + \underset{\text{Oxygen}}{6O_2}$$

Aplicação:Datação por radiocarbono 2

A planta vai morrer: a fotossíntese para, e a quantidade de $14 - C$ dentro da planta vai diminuir (decaimento radioativo)
Consequência: seja N_1 a quantidade que a planta deveria conter, e N_r a quantidade real.

$$N_r = N_1.e^{-\lambda.t} \Rightarrow t = 1\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_r}{N_1}\right)$$

Dois teoremas sem demonstrações

Teorema (do valor intermediário)

*Se f for contínua em $[a, b]$ e se γ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c*in*$]a, b[$ tal que $f(c) = \gamma$.*

Consequência importante: se $f(a) < 0, f(b) > 0$ e f contínua em $[a, b]$ então existe $\gamma \in]a, b[$ tal que $f(\gamma) = 0$.

Teorema

Se f for contínua em $[a, b]$ então exisirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. (Isto é $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$, e $f(x_2)$ é o valor máximo)

Mais consequências do teorema do valor medio

Exercício ($e^x \to \infty$ mais rapidamente que x)

1. *Mostrar* $e^x > x$ *para todo* $x \geq 0$
2. *Mostre que* $e^x > (x^2)/2$ *para todo* $x \geq 0$
3. *Mostre que* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Exercício

Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ *admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raiz.*

Máximo, mínimo local

Definição

1. *Uma função f tem um máximo local em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.*
2. *Uma função f tem um mínimo local em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.*

Como reconhecer um máximo ou mínimo local para f derivavel:

Teorema

Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Demonstração:

Definição

Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Exercício

Encontre os números críticos:

$$f(x) = 4 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}x^2$$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$$

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$$

$$g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$$

$$g(t) = |3t - 4|$$

$$g(y) = \frac{y - 1}{y^2 - y + 1}$$

$$h(p) = \frac{p - 1}{p^2 + 4}$$

$$h(t) = t^{3/4} - 2\,t^{1/4}$$

$$g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$$

Máximo absoluto (ou global)

Definição

Uma função f tem máximo absoluto (ou máximo global) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D_f$. O número $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D_f. Também f tem um mínimo absoluto em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D_f$, e o número $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D_f. Os valores máximo e mínimo de f são chamados valores extremos de f.

Como determinar os valores extremos de f contínua em $[a,b]$ fechado:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a,b);
2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo (isto é, em a e b);
3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Encontre os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f

Exercício

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leqslant 3$$

$$f(x) = 2 - \tfrac{1}{3}x, \quad x \geqslant -2$$

$$f(x) = 1/x, \quad x \geqslant 1$$

$$f(x) = 1/x, \quad 1 < x < 3$$

$$f(x) = \sin x, \quad 0 \leqslant x < \pi/2$$

$$f(x) = \sin x, \quad 0 < x \leqslant \pi/2$$

$$f(x) = \sin x, \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$$

$$f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$$

$$f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$$

$$f(x) = |x|$$