MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 2/ Ter. 25/02/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 1

1. Informaçãoes gerais:
   - **Email:** sylvain@ime.usp.br
   - **Site:** ver o link para MAT 2110 na pagina `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`

---

2. **Números:** naturais, inteiros, racionais, e reais.
3. **Funções:** def., gráfico, **imagem** de f;
4. **Notação:** $f(x)$, notação da teoria dos conjuntos:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$$

5. **Intervalos:** $(3;4,1)$, $[-2,10)$, $(-\infty,4)$.
6. **Desigualdades:** algumas regras, resolver $3x+7<0$, $x^2+2x-8 \geq 0$ (idéia: escrever como um produto de fatores).

Praticar com desigualdades

Exercício

Resolva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

Demonstração

Temos que escrever tudo de um lado

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0$$

e depois re-escrever como um produto de fatores simples:

$$x(x-1)(x+4) > 0.$$

Finalmente, podemos determinar as soluções da equação $x(x-1)(x+4) = 0$ *e cortar o eixo real em 4 intervalos:*

Praticar com desigualdades II

Intervalo	x	$x-1$	$x+4$	$x(x-1)(x+4)$
$x < -4$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-4 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$
$0 < x < 1$	$+$	$-$	$+$	$-$
$x > 1$	$+$	$+$	$+$	$+$

Então o conjunto solução é :

$$\{x \mid -4 < x < 0 \text{ or } x > 1\} = (-4, 0) \cup (1, \infty)$$

Valor absoluto

Definição

O valor absoluto (também chamado módulo) de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 sobre o eixo real.

- **Propriedade 1:** para todo número a, $|a| \geq 0$.
- **Propriedade 2:** $|a| = a$ se $a \geq 0$, e $|a| = -a$ se $a < 0$.
- **Propriedade 3:** $|a||b| = |ab|$.
- **Propriedade 4:** "Desigualdade triangular"

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

- **Propriedade 5:** vamos supor $a > 0$, então:

$$|x| = a \text{ se e somente se } x = \pm a$$

$$|x| < a \text{ se e somente se } -a < x < a$$

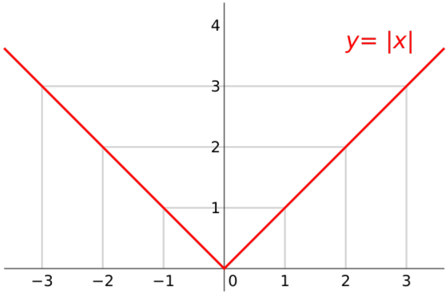
$$|x| > a \text{ se e somente se } x > a \text{ ou } x < -a.$$

A função valor absoluto

Definição:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Gráfico:



Exercício

Dóminio e imagem da função valor absoluto? Que dizer da função $||x||$*?*

Valor absoluto e desigualdades: como resolver os problemas

Resolva:

$$3x - 11 < 4$$

$$4 - 3x \geqslant 6$$

$$1 + 5x > 5 - 3x$$

$$1 < 3x + 4 \leqslant 16$$

$$-5 \leqslant 3 - 2x \leqslant 9$$

$$2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$$

$$(2x + 3)(x - 1) \geqslant 0$$

$$x^2 < 2x + 8$$

$$|x| \geqslant 3$$

$$|x - 6| < 0.1$$

$$|x + 1| \geqslant 3$$

$$|5x - 2| < 6$$

$$0 < |x - 5| < \tfrac{1}{2}$$

Exercicios com o valor absoluto

Exercício

Elimine o valor absoluto:

$$|2x - 1| + |x - 2|$$

$$|x - 2| - |x + 1|$$

Exercício

Demostrar:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Exercício

Demostrar que para todos $u, v \in \mathbb{R}$ *temos que:*

$$|u - v| \geq ||u| - |v||$$

Exemplo:

Exercício

Sabemos que 100g de soja contem 35g de protéinas e 100g de lentilha contem 26g de protéina. Tamb'em sabemos que a gente precisa de 70g de protéinas cada dia. Seja x (em unidades de 100g) a quantidade diária de soja e y (em unidades de 100g) a quantidade diária de lentilha. Descrever no plano (x, y) todas as quantidades (x, y) que vão dar mais do que 70g de protéinas.

Demonstração

Uma primeira observação é que $x \geq 0, y \geq 0$. A protéina diária obtida é $35x + 26y$. Agora a gente quer obter mais do que 70g, então precisamos estudar a desigualdade

$$35x + 26y \geq 70.$$

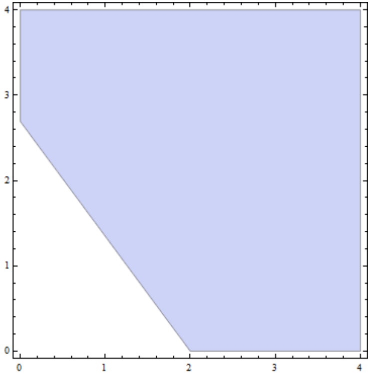
Mas agora,

$$35x + 26y \geq 70 \Leftrightarrow y \geq -\frac{35x + 70}{26} = (-1,35)x + 2,69.$$

Exemplo II

Demonstração

Os pontos que vão satisfazer essa relação são na parte cinza.



Exercicios sobre gráficos

Exercício

O conjunto $\{(x, y) \mid 3x + 4y = 5\}$ *é o grafico de uma função?*

Exercício

Determinar graficamente a interseção e a união dos conjuntos $\{(x, y) \mid x + y - 5 > 0\}$ *e* $\{(x, y) \mid x - 2y + 2 > 0\}$. *Lembra que a união de dois conjuntos* A *e* B *é definida por:*

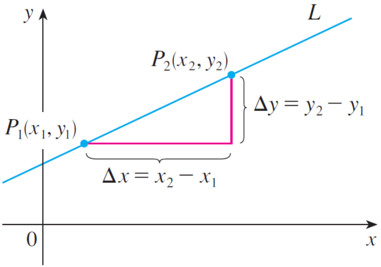
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Exercício

Grafico de $f(x) = |x|$, *de* $|x - 6|$, *de* $2|x|$, *de* $|x| + 2$?

Inclinação de uma reta não vertical que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) :

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



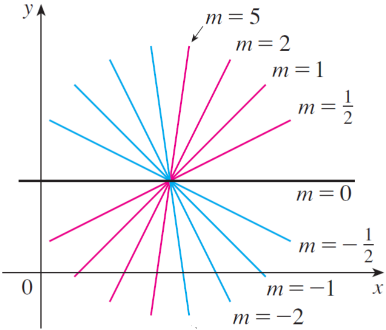
Equação de uma reta passando pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$ com inclinação m:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Exercícios

Equação mais geral de uma reta:

$$Ax + By + C = 0$$



Exercício

Mostrar que se os interceptos x e y de uma reta são os números a e b ($\neq 0$), então a equação da reta pode ser escrita como:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Encontrar a equação de uma reta cujo intercepto x é 6 e cujo intercepto y é -8.

Tudo sobre as equações quadráticas

Equação quadratica:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Teorema

As soluções são:

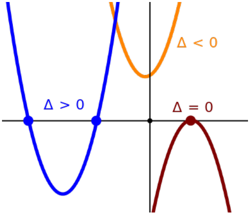
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Observação 1:** quando o **discriminante** $D = b^2 - 4ac$ é igual a 0, so tem uma solução única $x = -\frac{b}{2a}$.
- **Observação 2:** quando o **discriminante** $D = b^2 - 4ac < 0$, não existem soluções reais.
- **Observação 3:** quando o **discriminante** $D = b^2 - 4ac > 0$, existem duas soluções (também chamados ”zeros” ou ”raízes”) reais distintas x_1, x_2.

Geometria da equação quadrática

Porque? Explicação simples ("completamento de quadrados"):

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$



Caso com 2 soluções: podemos fatorar $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ como:

$$(x-x_1)(x-x_2)=x-(x_1+x_2)x+x_1x_2$$

Teorema

A soma das raízes é $-b/a$ e o produto das raízes é c/a.

Exercício

Discutir o caráter das raízes na equação quadrática:

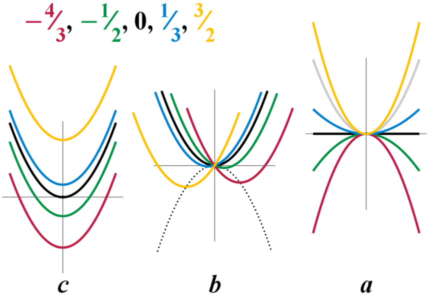
$$9x^2-(m-3)x+1=0$$

Equação quadrática

.

Exercício

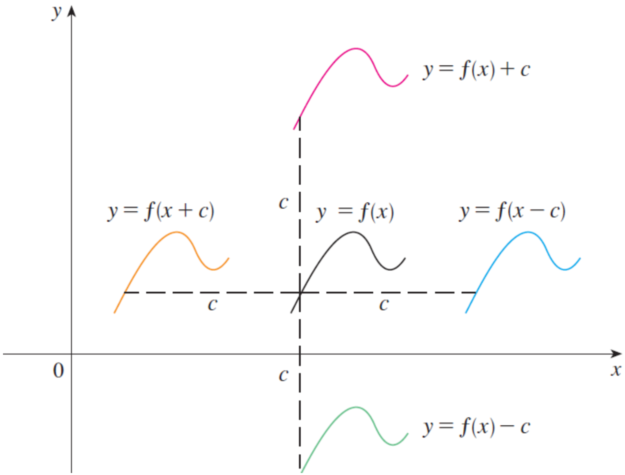
Resolver $y^4 - y^2 = 12$. *Resolver* $u - 2\sqrt{u} = 3$.



Exercício

Determinar o valor de x *tal que* $3x^2 + 2x + 3$ *é minimo.*

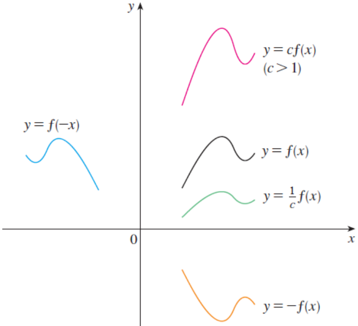
Translações:para cima, para baixo, para esquerda , para direita



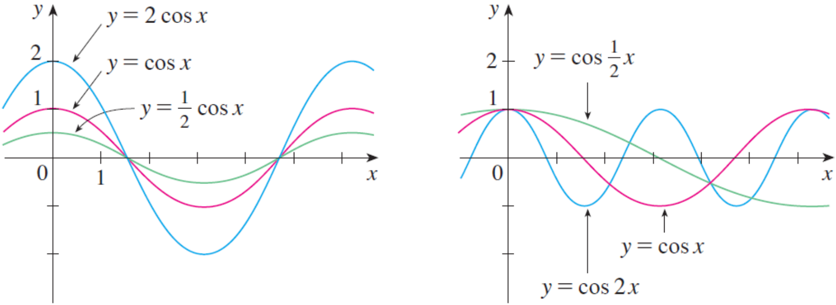
Transformações de gráficos: esticamento e reflexão

Esticamento e reflexão: suponha $c > 1$

1. $y = cf(x)$ estique o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
2. $(1/c)f(x)$ comprima.
3. $f(cx)$ comprima horizontalmente.
4. $f(x/c)$ estique horizontalmente por um fator de c,
5. $-f(x)$ reflita o gráfico em torno do eixo x
6. $f(-x)$ reflita em torno do eixo y.



Exemplos de esticamentos: com a função co-seno / Aplicação



Exercício

Demostrar que o gráfico de qualquer função quadrática pode ser obtido a partir do gráfico de $y = x^2$ com translações, esticamentos e reflexões.

Exemplos

Exercício

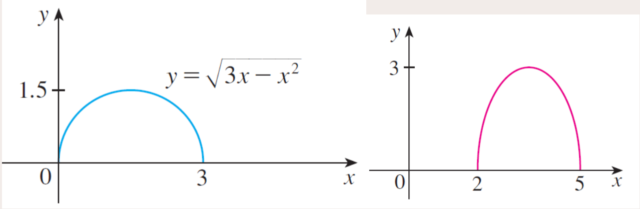
Esboce o gráfico de $x^2 + 10x + 27$.

Exercício

Esboce o gráfico de $|x^3 - 2x|$.

Exercício

O gráfico de $y = \sqrt{3x - x^2}$ *é dado. Use as transformações para criar uma função cujo gráfico é mostrado.*



Função composta

Imagem de f: lembra que a imagem de f é $Imf = \{f(x) \mid x \in D_f\}$.

Definição

Sejam f e g duas funções tais que $Imf \subset D_g$, então a função dada por

$$y = g(f(x)), x \in D_f$$

é chamada função composta de g e f, e é denotada por $g \circ f$.

Pergunta: $g \circ f = f \circ g$? ou não?

Exercício

Determine $g \circ f$ e $f \circ g$ para $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$.

Exemplos de composições

Encontre as funções $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ e seus domínios

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = x - 2, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$$

$$f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = \cos x$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$$

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}, \quad g(x) = \sin 2x$$