MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 14/ 01/04/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 13

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Monitoria na proxima semana:** Monitoria do dia 11.04.2014: vai ser na sala 04 bloco 06.
3. **No site:** lista 3 (e respostas) + lista de tópicos para Prova 1
4. **Prova 1**: lembra que a Prova 1 é na Terça 08/04, horario habitual, sala habitual (isto é 21:00 até 22:40).
5. **Derivadas:** definição de $f'(a)$ e equação da reta tangente à curva $y = f(x)$.

$$\boxed{y - f(p) = f'(p).(x - p)}$$

6. **Função diferenciavel (=derivavel)**
7. **Derivadas de x^n**: $(x^n)' = n.x^{n-1}$.
8. **Regras de diferenciação:**

$$(f+g)' = f' + g' \text{ e também } (c.f)' = c.f', \text{ onde } c \text{ é constante.}$$

9. **Derivada de um produto:** $(f.g)' = f'.g + f.g'$

Modelo de prova: é uma brincadeira, ver o slide seguinte...

$1^{\underline{a}}$ Prova de MAT 2110- Cálculo I
08/04/2014

$1^{\underline{a}}$ **Questão:** Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+5x-12}{34x^4-7x+12}$

a) (1,0 ponto) Determine todas as assintotas

b) Faça o mesmo para $x \to -1$

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** Assintotas verticais e horizontais de $y = \frac{\sqrt{x^3}-7x+12}{e^x-x^3-5}$

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** Reta tangente á curva $y = \frac{3x-2}{5x^2-12x}$ em $(2,3)$

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** Calcule o limite em $+\infty$, $x^3.\cos(3/x^2)$

$5^{\underline{a}}$ **Questão:** Calcule os limites em $-\infty$, $+\infty$ e -1 de $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^3}-\sqrt{\cos x^2}}{3x^2-1}$

$6^{\underline{a}}$ **Questão:** Calcule a derivada de $f(x) = \frac{3x^2-\cos(4x^2)}{\sqrt{1+x^2}-\operatorname{sen} x^3}$

$7^{\underline{a}}$ **Questão:** Calcule os limites em $-\infty$, $+\infty$ e -1 de $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^3}-\sqrt{\cos x^2}}{3x^2-1}$

$8^{\underline{a}}$ **Questão:** Calcule os limites em $-\infty$, $+\infty$ e -1 de $f(x) = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} 3x^3-x^3}-\sqrt{x^2}}{3x^2-1}$

$9^{\underline{a}}$ **Questão:** Calcule os limites em $-\infty$, $+\infty$ e -1 de $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^3}-\sqrt{\cos x^2}}{3x^2-1}$

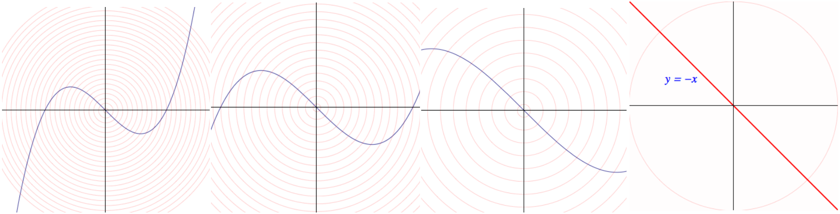
$10^{\underline{a}}$ **Questão:** Calcule os limites em $-\infty$, $+\infty$ e -1 de $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^3}-\sqrt{\cos x^2}}{3x^2-1}$

Que dia é hoje?

Dia 1 de Abril = Dia da mentira !

Mais uma interpretação da reta tangente

Ideia: "a reta tangente é o que você vai obter depois de fazer um zoom infinito perto do ponto $(a, f(a))$. (= olhar com um microscópio o gráfico) **Exemplo:** vamos considerar $f(x) = x(x-1(x+1)$



Demonstração: vamos fazer um "zoom" (isto é, um esticamento horizontal e vertical, com o mesmo fator $c \to \infty$)

$$y = c.f(\frac{x}{c}) \Rightarrow y = c.\frac{x}{c}.(\frac{x}{c}-1).(\frac{x}{c}+1) \to -x$$

Exercicios com derivadas

Exercício

Encontre a derivada da função usando a definição. Estabeleça os domínios da função e da derivada.

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

$f(x) = mx + b$

$f(t) = 5t - 9t^2$

$f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

$f(x) = x^2 - 2x^3$

$g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$g(x) = \sqrt{9 - x}$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

$G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

$f(x) = x^{3/2}$

$f(x) = x^4$

Teorema (Regra do produto)

Se f e g forem diferenciáveis, então:

$$(f.g)' = f'g + fg'$$

Prova: simplesmente observar:

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x).(g(x) - g(a))}{x-a} + \frac{(f(x) - f(a)).g(a)}{x-a}$$

mas agora

$$\frac{f(x).(g(x) - g(a))}{x-a} \to f(a).g'(a) \text{ porque } f \text{ continua e } g \text{ derivável em a}$$

e também

$$\frac{(f(x) - f(a)).g(a)}{x-a} \to f'(a).g(a) \text{ porque } f \text{ é derivável em } a$$

Conseqüências das regras de diferenciação

Vamos utilizar as regras, juntas com o teorema seguinte:

Teorema

Seja $n \neq 0$ um natural. Então temos:

- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$.
- $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx.-n-1, x \neq 0$.
- $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$*, onde $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for impar e $n \geq 2$.*

Exercício

Calcule a derivada de $P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 8$.

Exercício

Calcule a derivada de $f(x) = 3x.\sqrt{x} + 6x^4$.

Regra da recíproca e do quociente

Teorema

Se g for diferenciável,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Prova:

$$0 = (1)' = \left(g(x).\frac{1}{g(x)}\right)' = g'(x).\frac{1}{g(x)} + g(x).\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

então

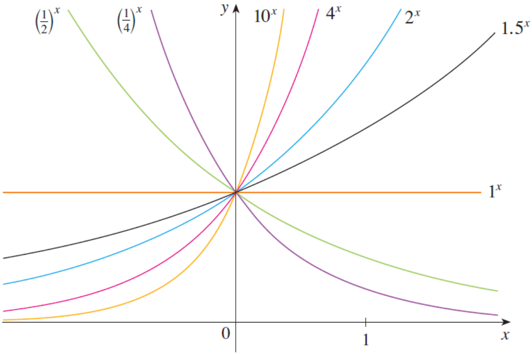
$$-g'(x).\frac{1}{g(x)} = g(x).\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

Teorema (Regra do quociente)

Se f eg forem deriváveis em p e se $g(p) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ sera derivável em p e,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2}$$

Derivada e exponencial



Escolha de e: o unico número tal que a reta tangente no ponto $(0, 1)$ tem inclinação $= 1$. Mas isso significa: $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Teorema

$$(e^x)' = e^x$$

Prova: $\frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \frac{e^a . e^h - e^a}{h} = e^a . \frac{e^h - 1}{h} \to e^a . 1 = e^a$

Exercício (Diferencie)

3. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{x}{e^x}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

7. $g(x) = \dfrac{1 + 2x}{3 - 4x}$

8. $G(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x + 1}$

9. $H(u) = \left(u - \sqrt{u}\right)\left(u + \sqrt{u}\right)$

10. $J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$

13. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

14. $y = \dfrac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

15. $y = \dfrac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^2 + 1}$

16. $y = \dfrac{t}{(t - 1)^2}$

17. $y = e^p\left(p + p\sqrt{p}\right)$

18. $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$

Derivada e sen, cos

Exemplo: calcule a derivada de sen em 0 (Resposta: $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}x}{x}=1$).

Exercício

Mostrar:

$$(\mathrm{sen}x)' = \cos x$$

Prova:

$$\frac{\mathrm{sen}(x+h)-\mathrm{sen}(x)}{h} = \frac{\mathrm{sen}(x)\cos(h)+\cos(x)\mathrm{sen}(h)-\mathrm{sen}(h)}{h}$$

Mas isso é:

$$= \mathrm{sen}(x).\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x).\frac{\mathrm{sen}(h)}{h} \to \mathrm{sen}(x).0+\cos(x).1$$

Exercício (Teorema a saber)

$$(\cos x)' = -\mathrm{sen}(x) \textit{ e também } (\mathrm{tg}x)' = (\mathrm{sec}x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

Prova: tomar a derivada de $(\cos x)^2 + (\mathrm{sen}x)^2 = 1$!

Exemplos

Exercício (Diferencie)

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$
2. $f(x) = \sqrt{x}\sin x$
3. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cot x$
4. $y = 2\sec x - \csc x$
5. $y = \sec\theta\ \tan\theta$
6. $g(\theta) = e^{\theta}(\tan\theta - \theta)$
7. $y = c\cos t + t^2\sin t$
8. $f(t) = \dfrac{\cot t}{e^t}$
9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$
10. $y = \sin\theta\cos\theta$
11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$
12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$
13. $y = \dfrac{t\sin t}{1 + t}$
14. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\tan x}$
15. $f(x) = xe^x\csc x$
16. $y = x^2\sin x\tan x$

Derivadas superiores

Derivada segunda: se $y = f(x)$ for diferenciável, temos uma nova função $x \mapsto f'(x)$. Mas pode ser que essa função também é diferenciável, então $(f')' = f''$ existe e é chamada derivada segunda de f. Ou:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Exemplo fundamental: (posição)′=velocidade, (velocidade)′=aceleração, então: (posição)″=aceleração.
Lei de Newton:

$$m.\vec{a} = \vec{F}$$

onde $\vec{F}$ é a resultante de todas as forças aplicadas ao ponto.
Queda livre: $m.a = m.g \Rightarrow v(t) = gt + v_0$ e $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$.
Movimento harmônico simples: movimento de uma mola

$$\text{Lei de Hooke:} \qquad mx''(t) = -kx(t)$$

Exemplos

Exercício

Determine f', f'', f''' *para*

1. $f(x) = 4x^4 + 2x$
2. $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{x^3}$
3. $x.|x|$
4. e^x
5. $\cos x$
6. $\mathrm{sen} x$