

MAT 2110 : Cálculo para Química

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Informações gerais

- **Prof.:** Sylvain Bonnot
 - **Email:** sylvain@ime.usp.br
 - **Minha sala:** IME-USP, 151-A (Bloco A)
 - **Site:** ver o link para MAT 2110 na página
<http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html>
Nessa página: as notas de aulas, informações gerais, listas de exercícios (com soluções...), etc...
-
- **Monitor:** aguardando para ver se tem um...
 - **Avaliação:** mais detalhes depois, sobre as provas (local e horário, etc...)
-

Objetivo

Uma apresentação global do cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real e suas aplicações a Química.

- Funções elementares de uma variável real; função exponencial e função logarítmica; funções trigonométricas. Noções de limite e continuidade.
- Derivada e diferencial; regras de derivação; taxa de variação; aplicações às ciências biológicas.
- Integral indefinida e integral definida. Técnicas de integração. Teorema Fundamental do Cálculo e Aplicações.
- Noções de equações diferenciais e aplicações

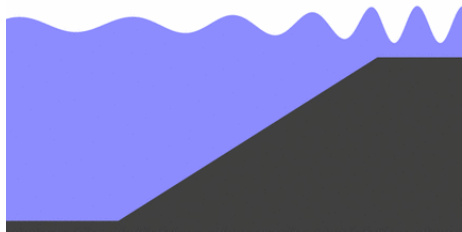
Observação 1: ≤ 1850 do ponto de vista da matemática... mas as aplicações são bem mais recentes...

- J. Stewart. CÁLCULO, volume I, Editora Pioneira - Thomson Learning, São Paulo 2001.
 - Guidorizzi, Cálculo.
-
- Qualquer livro que parece ajudar,
 - Notas do web,
 - Aulas do youtube, artigos da wikipedia,
 - **Minhas notas de aulas, no meu site...**

Motivação e exemplos: porque estudar cálculo?

Modelos: descrever uma situação complexa com uma função matemática (util para fazer previsões por exemplo).

- ① **Tsunami:** depois de um terremoto, a velocidade de um tsunami é dada por $v = 11.24\sqrt{p}$ (em quilômetros por hora), onde p é a profundidade do mar. No Pacífico, onde a profundidade média é de 4500 metros, qual é a velocidade de um tsunami? (754 km/h)



Pergunta: quanto tempo antes da chegada do tsunami?

$$\text{Resposta: } t = \int_0^x \frac{1}{v(u)} du$$

- 1 **Um ano na vida de um cão equivale a 7 anos na vida de um homem:** bom, parece que a situação é mais complicada:

$$f(x) = \begin{cases} 15x & 0 \leq x \leq 1 \\ 15 + 9(x - 1) & 1 < x \leq 2 \\ 24 + 4(x - 2) & x > 2 \end{cases}$$

- 2 **Tamanho dos animais em relação com o tamanho de uma ilha:** para os animais de sangue frio (ectotérmicos):

$$\text{peso } y = 0.249x^{0.47},$$

onde x é o tamanho da ilha (ou continente, em km^2). Mas para os mamíferos, a fórmula é diferente:

$$y = 0.469x^{0.52}$$

Exercício: buscar o tamanho da ilha de Hawaii, do continente africano e ver se é verdade...

Mais modelos:

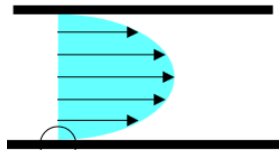
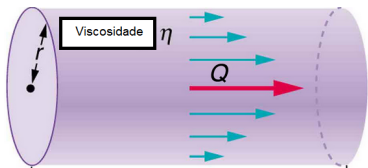
Lei de Poiseuille : para o fluxo de um líquido viscoso através de um tubo de cilíndrico de raio R (exemplo: fluxo do sangue numa veia).

Velocidade: r á a distância até o centro da veia, R é o raio da veia, V a velocidade, e p, L, v são constantes aqui:

$$V = \frac{p}{4Lv}(R^2 - r^2)$$

Utilização de uma integral para calcular o fluxo total: (isto, é, qual é a quantidade de sangue que vai atravessar a veia, por segunda):

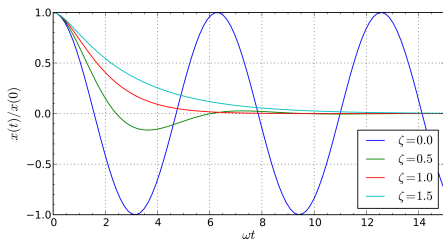
$$\text{Fluxo total} = \int_0^R 2\pi \frac{p}{4Lv} (R^2 - r^2) r dr$$



Modelos e equações diferenciais: movimento de uma mola, amortecimento

Equação diferencial : por exemplo, se $x(t)$ é a posição de um objeto, $v(t) = \frac{dx}{dt}$ a velocidade, e $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ a aceleração, um exemplo de equação diferencial seria:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$



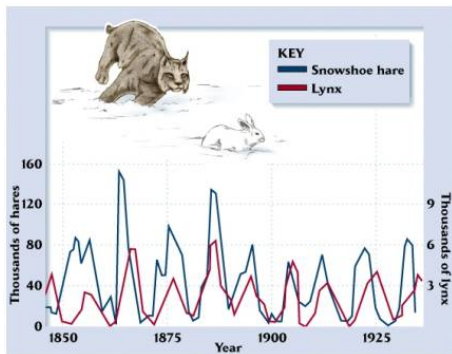
Ultimo exemplo: equações diferenciais e população

Equação de Lotka-Volterra : vamos estudar duas populações de animais: uma população de coelhos $x(t)$, e uma população de predadores dos coelhos (os "lincs"), $y(t)$. Para saber qual é o predador:



Agora, a gente pode observar um fenômeno bizarro: uma periodicidade das populações. Como explicar isso?

Equação de Lotka-Volterra



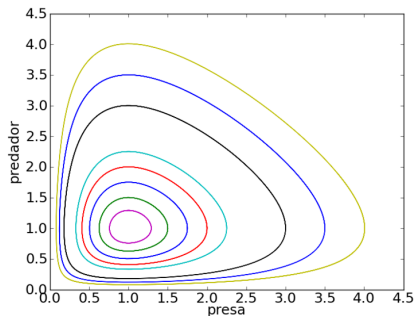
Modelo para a situação:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

Equação de Lotka-Volterra II

Para simplificar, vamos fazer $a = b = c = d = 1$.



Periodicidade: vem do fato que a curva $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ é uma curva fechada. A gente pode mostrar que essa curva é dada pela equação seguinte:

$$\ln(y) - y = -\ln(x) + x$$

- **Números naturais:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Podemos definir a adição $a + b$ dos números naturais, mas não podemos definir a subtração, porque $2 - 5$ não é um **natural**.
- **Números inteiros:** $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (vem da palavra alemão "Zahlen"). Temos as operações de soma, subtração e multiplicação (o resultado é um inteiro). Problema: não existe um inteiro x tal que $3x = 5$. Então temos que considerar um conjunto de números maior:
- **Números racionais:** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ com } b \neq 0 \right\}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ significa " a é elemento de \mathbb{Z} ".
Agora podemos finalmente definir as 4 operações. Na verdade os gregos como Pitágoras aceitavam somente os números racionais. Problema: Hipasus mostrou que tem números que não são racionais. Os outros estudantes de Pitágoras expulsaram Hipasus da Escola e o afogaram no mar...

Necessidade dos números reais

Teorema

$\sqrt{2}$ não é um número racional.

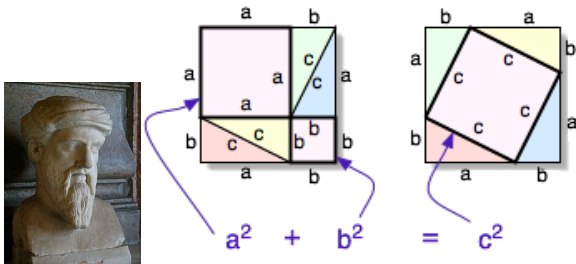


Figure : Pitágoras e o teorema de Pitágoras

Demonstração

Vamos supor a existência de um racional $\frac{p}{q}$ tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$,

Demonstração

e tal que a fração $\frac{p}{q}$ é **reduzida** (significando: que não tem um inteiro que pode dividir p e q).

Podemos ver que $p^2 = 2q^2$, então p tem que ser um número par (porque o quadrado de um número ímpar é ímpar). Isso significa que eu posso escrever $p = 2r$ (isto é exatamente a definição de um número par), mas então $p^2 = (2r)^2 = 4r^2$, e eu obtenho:

$$4r^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2 \text{ (essa flecha significa "implica")},$$

OK, mas agora eu sei que q é um número par também, isto é, existe um inteiro s tal que $q = 2s$ (impossível! porque eu poderia reduzir a fração $\frac{p}{q} = \frac{2r}{2s} = \frac{r}{s}$).

Números reais

- **Definição:** um número real é dado por um inteiro com sinal mais ou menos, mais uma virgula, mais um número finito ou infinito de casas decimais depois. Os números reais são os números da calculadora, mas com possibilidade de ter um número infinito de decimais.
- **Exemplos** $-351,121112211122211122 \dots$ é um número real, π , $\sqrt{21}$ também ...
- **Convenção:** vocês já sabem que $23,99999999 = 24$. Na verdade, é fácil mostrar isso:

Demonstração

Vamos escrever $x = 23,99999 \dots$. Então $10x = 239,9999 \dots$. Depois de uma subtração, temos que $9x = 239$, mas isso significa que $x = 24$.

- **Cuidado!** O número $23,88888888$ não é igual a $23,9$!
- **Notação:** o conjunto de todos os reais é \mathbb{R} .
- **Relação com os outros números:**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ onde } \subset \text{ significa "está contido"}$$

$\sqrt{2}$ é um número real ou não?

Teorema

Existe um número real, escrito $\sqrt{2}$, cujo quadrado é igual a 2.

Demonstração (idéia principal)

Vamos simplesmente construir o número real $\sqrt{2}$, com todas as decimais dele:

- **"Parte inteira"**: é claro que $1^2 = 1 < 2$, mas $2^2 = 4 > 2$, então $\sqrt{2}$ tem que ter uma parte inteira igual a 1.
- **Primeira decimal depois da virgula:**

$$(1,3)^2 = 1,69 < (1,4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 = 2,25$$

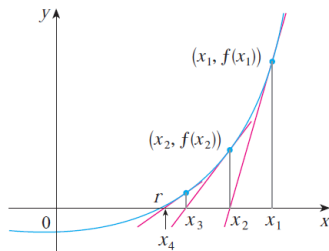
então $\sqrt{2}$ tem que começar com 1,4.

- **Segunda decimal:** $\sqrt{2}$ tem que começar com 1,41 porque:

$$(1,41)^2 = 1,9881 < 2 < (1,42)^2 = 2,0164$$

Conclusão:

- **Conclusão:** dessa maneira, a gente pode construir uma sequência infinita de decimais, isto é, um número real que vai ser exatamente $\sqrt{2}$.
- **Bem melhor: método de Newton para calcular $\sqrt{2}$:** queremos resolver $x^2 - 2 = 0$:



$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{cases}$$

$$1; \frac{3}{2}; \frac{17}{12}; \frac{577}{408}; \frac{665857}{470832}; \frac{886731088897}{627013566048}$$

$$1; 1,5; 1.416666667; 1.414215686; 1.414213562; 1.414213562$$

Reconhecer \mathbb{Q} dentro de \mathbb{R}

Teorema

Os números racionais tem uma expansão decimal periodica.

Demonstração

Vamos ver isso com um exemplo: frações do tipo $n/7$ (por exemplo $3/7$). So tem um número finito de restos possíveis, então a sequência de decimais vai se repetir depois de um tempo.

Exercício

Dar exemplos de números reais que não são racionais (e que não são raizes).

Depois de \mathbb{R} ? Não é o fim da história...

Definição

O conjunto \mathbb{C} dos números **complexos** é

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\},$$

onde i satisfaz $i^2 = -1$.

- **Adição:** simplesmente

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- **Produto:**

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bi \cdot c + (bi)(di) \\ &= ac + (ad + bc)i + (bd)(-1) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Um pouco mais sobre \mathbb{C}

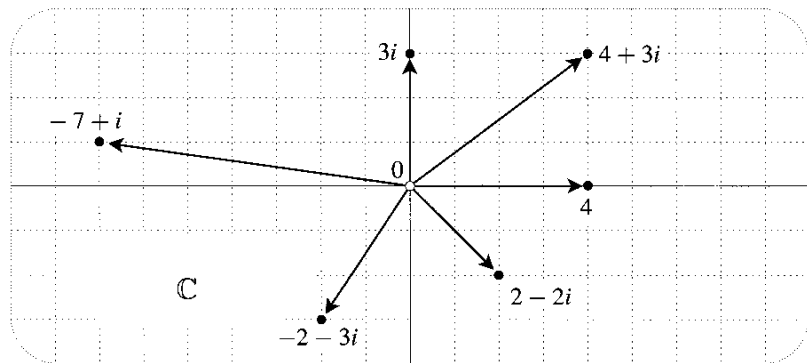
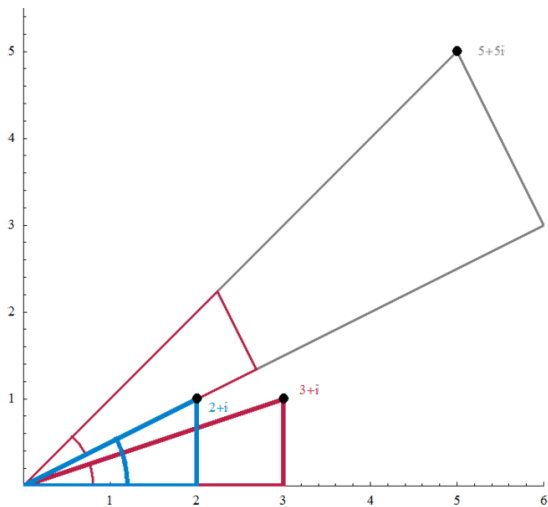
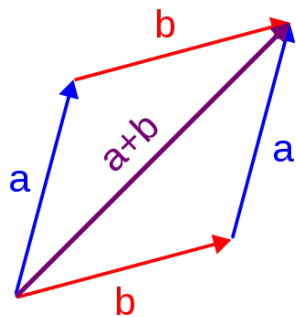


Figure : o plano complexo

Um pouco mais sobre \mathbb{C} : adição e produto em \mathbb{C}



Vamos considerar dois conjuntos: o conjunto X com elementos x e o conjunto Y com elementos y .

Definição

Uma **função** $f : X \rightarrow Y$ (leia: "f de X em Y") é uma regra que associa a cada elemento x de X um único elemento y de Y .

- **Domínio:** o conjunto X é o **domínio** de f , também escrito D_f .
- **Contradomínio:** o conjunto Y é o **contradomínio** de f .
- **Valor, imagem:** o único y de Y associado ao elemento x de X é indicado por $f(x)$ (leia: f de x), é o valor de f em x .
- **Imagem de f :** o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ é chamado a **imagem de f** .

Visualização de uma função:



Figure : Função como uma maquina

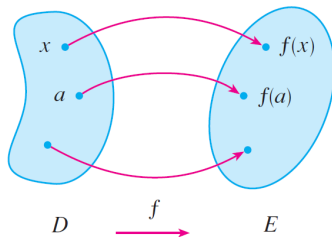


Figure : Diagrama de flechas

Gráfico de uma função

Definição

O **gráfico** de f consiste em todos os pontos do plano com coordenadas $(x, f(x))$ onde x está no domínio de f .

Exemplos: $f : x \mapsto x^2$, $g : u \mapsto u^3 \dots$

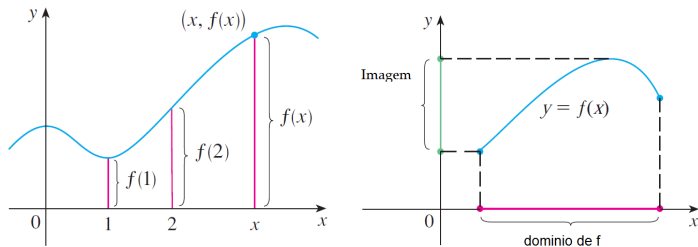
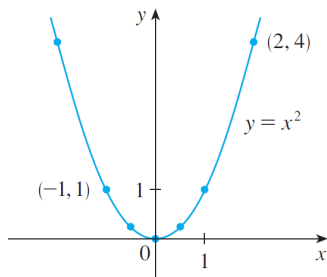


Figure : Exemplo de gráfico

Exemplos

Exemplo 1: Domínio e imagem de $f(x) = x^2$



Exemplo 2: Encontre o domínio e a imagem de $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, de $g(x) = \sqrt{x-7}$.

Exemplo 3: função afim É simplesmente uma função cujo gráfico é uma reta.

$$y = f(x) = mx + b,$$

onde m é o **coeficiente angular** ou **inclinação** e b é o **intercepto**.

Mais exemplos / Intervalos

Definição (Intervalo aberto)

O intervalo aberto de a até b , denotado pelo símbolo (a, b) é definido por:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

Exemplos: domínio de $\frac{x}{x^2-3}$

Definição (Intervalo fechado)

O intervalo fechado de a até b , denotado pelo símbolo $[a, b]$ é definido por:

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Exercício

Escrever a equação de uma função afim, dados dois pontos na reta. Equação de uma reta paralela a uma outra.

Regras para as desigualdades:

- Se $a < b$ então $a + c < b + c$
- Se $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$
- Se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$
- Se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$
- Se $0 < a < b$ então $1/a > 1/b$

Exercício

Resolva as desigualdades seguintes e ilustre o conjunto solução sobre o eixo real:

- 1 $3x + 9 > 4$
- 2 $5x < 2x + 1 \leq 3x + 4$
- 3 $2x^2 + x \leq 1$
- 4 $x^2 + 2x + 3 < 1.$

Exercício

Resolva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

Demonstração

Temos que escrever tudo de um lado

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0$$

e depois re-escrever como um produto de fatores simples:

$$x(x - 1)(x + 4) > 0.$$

Finalmente, podemos determinar as soluções da equação $x(x - 1)(x + 4) = 0$ e cortar o eixo real em 4 intervalos:

Praticar com desigualdades II

Intervalo	x	$x - 1$	$x + 4$	$x(x - 1)(x + 4)$
$x < -4$	-	-	-	-
$-4 < x < 0$	-	-	+	+
$0 < x < 1$	+	-	+	-
$x > 1$	+	+	+	+

Então o conjunto solução é :

$$\{x \mid -4 < x < 0 \text{ or } x > 1\} = (-4, 0) \cup (1, \infty)$$

Definição

O valor absoluto (também chamado módulo) de um número a , denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 sobre o eixo real.

- **Propriedade 1:** para todo número a , $|a| \geq 0$.
- **Propriedade 2:** $|a| = a$ se $a \geq 0$, e $|a| = -a$ se $a < 0$.
- **Propriedade 3:** $|a||b| = |ab|$.
- **Propriedade 4:** "Desigualdade triangular"

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

- **Propriedade 5:** vamos supor $a > 0$, então:

$$|x| = a \text{ se e somente se } x = \pm a$$

$$|x| < a \text{ se e somente se } -a < x < a$$

$$|x| > a \text{ se e somente se } x > a \text{ ou } x < -a.$$

Resolva:

$$3x - 11 < 4$$

$$4 - 3x \geq 6$$

$$1 + 5x > 5 - 3x$$

$$1 < 3x + 4 \leq 16$$

$$-5 \leq 3 - 2x \leq 9$$

$$2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$$

$$(2x + 3)(x - 1) \geq 0$$

$$x^2 < 2x + 8$$

$$|x| \geq 3$$

$$|x - 6| < 0.1$$

$$|x + 1| \geq 3$$

$$|5x - 2| < 6$$

$$0 < |x - 5| < \frac{1}{2}$$

Exercícios com o valor absoluto

Exercício

Elimine o valor absoluto:

$$|2x - 1| + |x - 2|$$

$$|x - 2| - |x + 1|$$

Exercício

Demonstrar:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Exercícios sobre gráficos

Exercício

O conjunto $\{(x, y) \mid 3x + 4y = 5\}$ é o gráfico de uma função?

Exercício

Gráfico de $f(x) = |x|$, de $|x - 6|$, de $2|x|$, de $|x| + 2$?