MAT 1351 : Cálculo I

Aula Terça 22 /05/2018

Sylvain Bonnot (IME-USP)

Resumo

1. Estudo geral de uma função
2. Regra de L'Hospital

Estudo geral de uma função

Exercício

Encontre as assíntotas verticais e horizontais. Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente. Encontre os valores máximos e mínimos locais. Use essas informações para esboçar o gráfico de f.

45. $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

46. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$

49. $f(x) = e^{-x^2}$

50. $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$

51. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

52. $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

Regra de L'Hospital

Teorema

Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a), onde a pode ser qualquer número real ou $\pm\infty$. Suponha que

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$
2. *Ou:* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$,

então;

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for $+\infty$ ou $-\infty$).

Aplicações de L'Hospital 2

17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

18. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\text{sen}\, \pi x}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

20. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

21. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^8 - 1}{t^5 - 1}$

22. $\lim_{t\to 0} \dfrac{8^t - 5^t}{t}$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-4x}}{x}$

24. $\lim_{u\to\infty} \dfrac{e^{u/10}}{u^3}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{senh}\, x - x}{x^3}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{tgh}\, x}{\text{tg}\, x}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \text{sen}\, x}{x - \text{tg}\, x}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^{-1} x}{x}$

30. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x 3^x}{3^x - 1}$

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

Uso de L'Hospital para outras formas indeterminadas

Forma indeterminada do tipo $(0).(\pm\infty)$:

Exercício

Determine os seguintes limites:

1. $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$
2. $\lim_{x\to -\infty} x.e^x$
3. $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}x)$
4. $\lim_{x\to\infty} x\mathrm{sen}(7/x)$

Forma indeterminada do tipo $(\pm\infty)^0$:

Exercício

Determine os seguintes limites:

1. $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$
2. $\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{1/x}$

Uso de L'Hospital para outras formas indeterminadas II

Exercício

Determine os seguintes limites:

1. $\lim_{y\to 0^+}(\cos(2y))^{1/y^2}$

Exercício

Determine $A, B, C \in \mathbb{R}$ *tais que* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + Ax + Bx^3}{x^5} = 1/C$.

Exercício

Seja f *tal que* f' *seja contínua. Mostre que:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

Exercício

Seja f *tal que* f'' *seja contínua. Mostre que:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

Derivação logarítmica

Ideia: dada uma função $y = f(x)$ complicada (por exemplo um produto grande, quociente, etc...). Podemos escrever $\ln y = \ln f(x)$ e derivar para obter:

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx} \ln f(x) \Rightarrow y' = y.\frac{d}{dx} \ln f(x)$$

Use a derivação logarítmica para achar a derivada de função.

39. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

40. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}$

42. $y = \sqrt{x}e^{x^2-x}(x + 1)^{2/3}$

43. $y = x^x$

44. $y = x^{\cos x}$

45. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

46. $y = \sqrt{x}^{\,x}$

47. $y = (\cos x)^x$

48. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

49. $y = (\operatorname{tg} x)^{1/x}$

50. $y = (\ln x)^{\cos x}$