MAT 1351 : Cálculo I

Aula Segunda 21/05/2018

Sylvain Bonnot (IME-USP)

Resumo

1. Teste da segunda derivada
2. Intervalos de concavidade
3. Estudo geral de uma função

Estudo geral de uma função

Exercício

Encontre as assíntotas verticais e horizontais. Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente. Encontre os valores máximos e mínimos locais. Use essas informações para esboçar o gráfico de f.

45. $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

46. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$

49. $f(x) = e^{-x^2}$

50. $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$

51. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

52. $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

Intervalos de concavidade

Exercício

Mostre que a função $x.|x|$ tem um ponto de inflexão na origem mas $g''(0)$ não existe.

Exercício

Mostre que $f(x) = x^4$ é tal que $f''(0) = 0$ mas 0 não é ponto de inflexão.

Exercício

Para as funções da parte **estudo geral***, encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.*

Regra de L'Hospital

Teorema

Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$
2. *Ou:* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$*,*

então;

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for $+\infty$ ou $-\infty$).

Demonstração: caso simples

Caso simples: $f(a) = g(a) = 0, f', g'$ contínuas com $g'(a) \neq 0$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

mas este limite é igual a;

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Demonstração: caso geral

Caso geral: Podemos supor f e g contínuas em $x = a$ e $f(a) = g(a) = 0$.

Teorema (Teorema do valor médio de Cauchy)

Sejam f e g contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Demonstração:
Aplicar Rolle para

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Demonstração de L'Hospital, caso geral: é só tomar o limite $b \to a$!

Aplicações de L'Hospital 1

7. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

8. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$

10. $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{4x^2 + 16x - 9}$

11. $\lim_{x \to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{tg} 5x}$

13. $\lim_{t \to 0} \dfrac{e^{2t} - 1}{\operatorname{sen} t}$

14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

Aplicações de L'Hospital 2

17. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

18. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \ln x}{x}$

21. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^8 - 1}{t^5 - 1}$

22. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{8^t - 5^t}{t}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 4x}}{x}$

24. $\displaystyle\lim_{u\to\infty} \frac{e^{u/10}}{u^3}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

26. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - x}{x^3}$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{\operatorname{tg} x}$

28. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

31. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x3^x}{3^x - 1}$

32. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$