MAT 1351 : Cálculo I

Aula Segunda 14/05/2018

Sylvain Bonnot (IME-USP)

Intervalos de crescimento e de decrescimento

Teorema

Seja f contínua no intervalo I

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I,*
2. *Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente decrescente em I.*

Demonstração: Vamos mostrar o primeiro caso: sejam $s < t$. Então existe $c \in (s, t)$ tal que $f(t) - f(s) = f'(c).(t - s) > 0$.

Intervalos de crescimento e de decrescimento : mais exemplos

Exercício

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico:

9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

10. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \; 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = x^2 - x - \ln x$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

Teste da primeira derivada

Teorema

Suponha que c seja um número critico de f contínua.

1. *Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c então f tem um máximo local em c,*
2. *Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c,*
3. *Se f' não mudar de sinal em c , então f não tem máximo ou mínimo locais em c.*

Exercício

Encontre os valores de máximo e mínimo locais com o teste da primeira derivada:

1. $f(x) = x^5 - 5x + 3$
2. $g(x) = x^2/(x-1)$
3. $\sqrt{x} - x^{1/4}$.

Uso da segunda derivada

Concavidade:

Definição

Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo $I = (a, b)$, então ele é chamado côncavo para cima em I. Se o gráfico estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, ele é chamado côncavo para baixo em I.

Como determinar a concavidade:

Teorema

1. *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f é côncavo para cima em I.*
2. *Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.*

Exercício

Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão para:
$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ *e* $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

Uso da segunda derivada II

Definição

Um ponto P na curva $y = f(x)$ é um ponto de inflexão se f é continua e a função mudar de concavidade em P.

Observação: se a curva tiver uma tangente em P ponto de inflexão, então a curva cruza sua tangente em P.
Mais uma aplicação:

Teorema (Teste da segunda derivada)

Suponha que f'' seja contínua perto de c.

1. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$ então f tem um mínimo local em c.*
2. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$ então f tem um máximo local em c.*

Exercício

Mostre o teste da segunda derivada.

Exercício

Encontre os valores de máximo e mínimo locais de f com o teste das derivadas primeira e depois o teste da derivada segunda, para

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}, \text{ e depois } g(x) = x + \sqrt{1-x}.$$

Revisão P2

1. Derivação e regras de derivação
2. Máximo, mínimo (local e global)
3. Intervalos de crescimento e decrescimento, esboço de gráficos
4. Teorema de Rolle, teorema do Valor Médio e aplicações

Regras de derivação

Exercício

Calcule as derivadas

1. $\ln(x^4 + x^{-4}$
2. $e^{x^4 - 3x^2 + \cos(2x)}$
3. $(2t^3 + \mathrm{sen} t)^{50}$
4. $tg^{-1}(2x).\sqrt[3]{1 - 3x^2}$
5. $\frac{(x^3+4)^5}{(1-2x^2)^3}$

Máximo, mínimo (global)

Exercício

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f:método do intervalo fechado

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [0.2, 4]$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$$

$$f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$$

$$f(t) = \sqrt[3]{t}(8 - t), \quad [0, 8]$$

$$f(t) = 2\cos t + \sin 2t, \quad [0, \pi/2]$$

$$f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$$

$$f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$$

$$f(x) = x - \ln x, \quad \left[\tfrac{1}{2}, 2\right]$$

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$$

Intervalos de crescimento e de decrescimento : mais exemplos

Exercício

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico:

9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

10. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = x^2 - x - \ln x$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

Teorema de Rolle, teorema do Valor Médio

Exercício

Seja f *derivável em* $\mathbb{R}$*, com* $f(6) = -2$ *e* $f'(x) < 10$ *para todo* x*. Maior valor possível de* $f(15)$*?*

Exercício

Seja f *derivável em* $\mathbb{R}$*, com 2 raízes. Mostre que* f' *tem uma raiz.*

Exercício

Seja $f(x) = 20x - e^{-4x}$*. Mostre que* f *tem exatamente uma raiz.*

Exercício

Seja $f(x) = x^7 + 2x^5 + 3x^3 + 14x + 1$*. Mostre que* f *tem exatamente uma raiz.*