MAT 1351 : Cálculo I

Aula Quinta 10/05/2018

Sylvain Bonnot (IME-USP)

Resumo:

- Teorema de Rolle
- Teorema do Valor Médio e consequências
- Intervalos de crescimento e de decrescimento

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f:método do intervalo fechado

Exercício

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [0.2, 4]$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$$

$$f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$$

$$f(t) = \sqrt[3]{t}(8 - t), \quad [0, 8]$$

$$f(t) = 2\cos t + \sin 2t, \quad [0, \pi/2]$$

$$f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$$

$$f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$$

$$f(x) = x - \ln x, \quad \left[\tfrac{1}{2}, 2\right]$$

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$$

Aplicações do teorema do valor médio: limites do tipo e^x/x

Exercício ($e^x \to \infty$ mais rapidamente que x)

1. *Seja* $x \geq 0$*, mostre que* $\frac{\log x - \log x^{1/2}}{x - x^{1/2}} \leq x^{-1/2} \to 0$ *quando* $x \to +\infty$
2. *Mostre que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$*.*
3. *Mostre que* $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^r} = 0$ *para* $r > 0$*.*
4. *Mostre que* $\lim_{x\to 0} x^r . \log x = 0$ *para* $r > 0$*.*
5. *Mostre que* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$ *para* $r > 0$*.*

Exercício

Mostre que $\lim_{x\to+\infty}(1 + (1/x))^x = e$*.*

Aplicações do teorema do valor médio: desigualdades

Exercício
Se $f(1) = 10$ *e* $f'(x) \geq 2$ *em* $[1,4]$ *quão pequeno* $f(4)$ *pode ser?*

Exercício
Se $f'(x) \in [3,5]$ *mostre que* $18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$.

Exercício
Mostre que $\sqrt{1+x} < 1 + (x/2)$ *para* $x > 0$.

Exercício
Mostre que $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |a - b|$ *para todo* a *e* b.

Intervalos de crescimento e de decrescimento

Teorema

Seja f contínua no intervalo I

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I,*
2. *Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente decrescente em I.*

Demonstração: Vamos mostrar o primeiro caso: sejam $s < t$. Então existe $c \in (s, t)$ tal que $f(t) - f(s) = f'(c).(t - s) > 0$.

Intervalos de crescimento e de decrescimento : mais exemplos

Exercício

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico:

9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

10. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \; 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = x^2 - x - \ln x$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

Teste da primeira derivada

Teorema

Suponha que c seja um número critico de f contínua.

1. *Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c então f tem um máximo local em c,*
2. *Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c,*
3. *Se f' não mudar de sinal em c , então f não tem máximo ou mínimo locais em c.*

Exercício

Encontre os valores de máximo e mínimo locais com o teste da primeira derivada:

1. $f(x) = x^5 - 5x + 3$
2. $g(x) = x^2/(x-1)$
3. $\sqrt{x} - x^{1/4}$.