MAT 1351 : Cálculo I

Aula Segunda 04/06/2018

Sylvain Bonnot (IME-USP)

Resumo

1. Formula de Taylor de ordem n
2. Taylor para desigualdades:

Exercício

mostre: $|\cos x - (1 - x^2/2)| \leq \frac{|x|^3}{3!}$

Polinômio de Taylor

Definição

Seja f derivável até a ordem n em um intervalo aberto I e seja $x_0 \in I$.
O polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

é chamado Polinômio de Taylor, de ordem n de f em volta de x_0.

Teorema

(Formula de Taylor de ordem n em volta de x_0 com resto de Lagrange)
Se f é derivável até a ordem $n+1$ no intervalo aberto I e $x, x_0 \in I$, então existe pelo menos um s entre x e x_0 tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

onde $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Exercícios: Formula de Taylor e séries de potências

Exercício

Mostre que para $x > 0$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Exercício

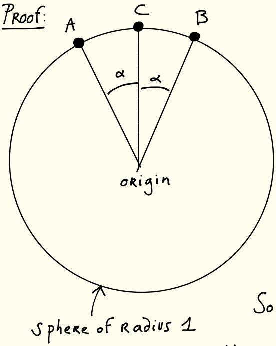
Mostre que $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$.

Aplicação: a distância do cos não é uma distancia

"Cosine distance is not a distance":

indeed, it does not satisfy the triangle inequality $d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,B)$

Proof:



Taylor's Formula: $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + (\operatorname{sen}\beta)\cdot\frac{\alpha^3}{6}$ for some $\beta \in (0,\alpha)$

Similarly, $\cos 2\alpha = 1 - \frac{(2\alpha)^2}{2} + (\operatorname{sen}\gamma)\cdot\frac{(2\alpha)^3}{6}$ for some $\gamma \in (0, 2\alpha)$

Hence: $d(A,C) = d(C,B) = 1 - \cos\alpha = \frac{\alpha^2}{2} - (\operatorname{sen}\beta)\cdot\frac{\alpha^3}{6} \leqslant \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6}$

So $d(A,C) + d(C,B) \leqslant \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{3}$

But $d(A,B) = 1 - \cos 2\alpha = 2\alpha^2 - (\operatorname{sen}\gamma)\frac{8\alpha^3}{3} \geqslant 2\alpha^2 - \frac{8\alpha^3}{3}$.

So for α small, $d(A,B) > d(A,C) + d(C,B)$.

How small? $2\alpha^2 - \frac{8\alpha^3}{3} > \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{3} \Leftrightarrow \alpha^2 > 3\alpha^3$ i.e $\alpha < \frac{1}{3}$

Conclusion: for angles $< \frac{1}{3}$ the triangle inequality fails.

Exercício: demonstração da formula de Taylor

Exercício

Mostre a formula de Taylor de ordem n para f entre a e b, aplicando o teorema de Rolle para:

$$g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A.\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

para um certo A bem escolhido.

Outras séries de Taylor

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && (x \in \mathbb{R}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} && (x \in \mathbb{R}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} && (x \in \mathbb{R}) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2!} + \cdots &&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n && (|x| < 1) \\
& \tbinom{a}{n} = a(a-1)\ldots(a-(n-1))/n! &&&& (a \in \mathbb{R}) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots &&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} && (|x| < 1) \\
-\log(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots &&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} && (|x| < 1)
\end{aligned}
$$

Prova Teorema de Taylor

$$R_n(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t) \\ &\quad - \cdots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Prova Teorema de Taylor II

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n+1} F(a),$$

$$\begin{aligned}
0 \;=\; G'(c) &= F'(c) + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}F(a) \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}F(a).
\end{aligned}$$

$$R_n(x) = F(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad \square$$

Problemas de otimização

Motivação: regressão linear, clustering (agrupamento), etc...

Exercício

Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

Exercício

Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ *mais próximo de* $(1, 4)$.

Resp.

1. Distância entre $(1, 4)$ e (x, y):

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

2. Re-escrever essa distância como uma função de uma variável só:

$$x = (1/2)y^2 \Rightarrow d = \sqrt{((1/2)y^2 - 1)^2 + (y-4)^2}$$

3. Achar o mínimo de $d^2 = ((1/2)y^2 - 1)^2 + (y-4)^2$

Problemas de otimização

Exercício

Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r.

Exercício

Qual é a distância vertical máxima entre a reta $y = x + 2$ e a parábola $y = x^2$ para $x \in [-1, 2]$?

Exercício

Um objeto (massa m) é arrastado ao longo de um plano horizontal Π por uma força F agindo ao longo de uma corda atada ao ob- jeto, fazendo um ângulo θ com Π, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu m g}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

onde $\mu =$ constante. Para qual valor de θ é F menor?