MAT 1351 : Cálculo I

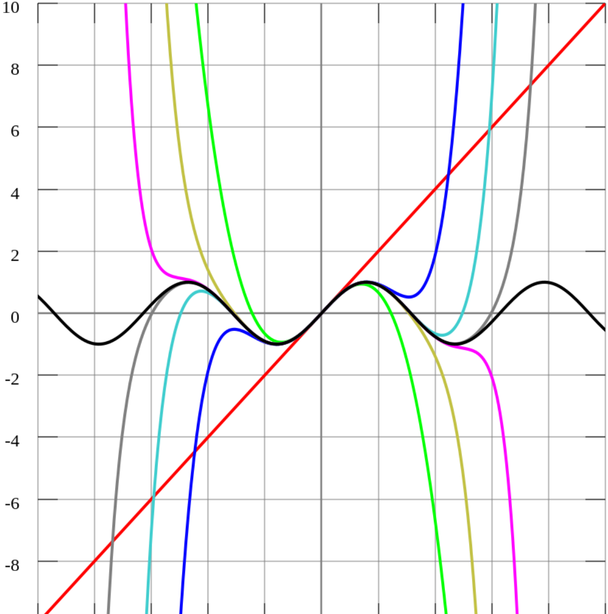
Aula Segunda 04/06/2018

Sylvain Bonnot (IME-USP)

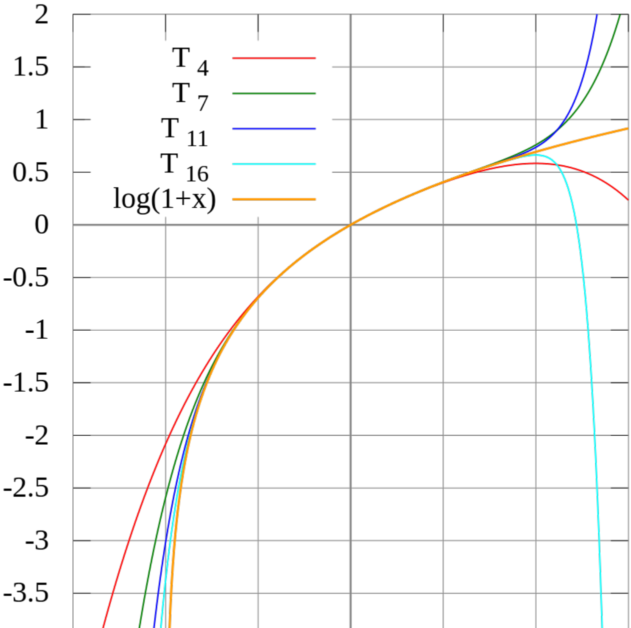
Resumo

1. Formula de Taylor
2. Polinômio de Taylor de ordem 1, e Erro $E(x)$

Aproximação com polinômios de Taylor: $\operatorname{sen} x$



Aproximação com polinômios de Taylor: $\ln(1+x)$



Formula de Taylor

Aproximação local de f derivável por uma função afim
A aproximação é dada por:

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0).$$

O erro feito na aproximação é $E(x)$ definido por:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + E(x).$$

Propriedade do erro:

$$\frac{E(x)}{x - x_0} \to 0 \text{ quando } x \to x_0.$$

Melhor aproximação:
se $L(x) = f(x_0) + m.(x - x_0)$ é tal que $\frac{f(x)-M(x)}{x-x_0} \to 0$ então $M = L$. Essa função é chamada **polinômio de Taylor de ordem 1 em volta de x_0.**

Expressão para o erro

Theorem

Seja f derivável até a segunda ordem no intervalo I e sejam x, x_0 *em I. Então existe pelo menos um* $\bar{x} \in (x, x_0)$ *tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2.$$

Demonstração: *seja* $E(x)$ *o erro e* $h(x) = (x - x_0)^2$.

1. *mostre que* $E(x_0) = 0$ *e* $E'(x_0) = 0$ *e também* $h(x_0) = h'(x_0) = 0$
2. *mostre a existência de* $\bar{x}_1 \in (x_0, x)$ *e* $\bar{x} \in (x_0, \bar{x}_1)$ *tais que*

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E'(\bar{x}_1)}{h'(\bar{x}_1)} = \frac{E''(\bar{x})}{h''(\bar{x})}.$$

Polinômio de Taylor

Definição

Seja f derivável até a ordem n em um intervalo aberto I e seja $x_0 \in I$. O polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

é chamado Polinômio de Taylor, de ordem n de f em volta de x_0.

Teorema

(Formula de Taylor de ordem n em volta de x_0 com resto de Lagrange) Se f é derivável até a ordem $n+1$ no intervalo aberto I e $x, x_0 \in I$, então existe pelo menos um s entre x e x_0 tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

onde $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Exemplos de formulas de Taylor-Lagrange

Formula de Taylor de ordem 1:

Teorema (Formula de Taylor de ordem n em volta de x_0 com resto de Lagrange)

Se f é derivável até a ordem 2 no intervalo aberto I e $x, x_0 \in I$, então existe pelo menos um s entre x e x_0 tal que

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x),$$

onde $R_1(x) = \frac{f''(s)}{2}(x - x_0)^2$.

Exercício

Encontre o polinômio de Taylor de ordem 1 de $f(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$ e o resto de Lagrange. Calcule um valor aproximado para $\ln(1,003)$ e avalie o erro. Fazer o mesmo para a ordem s2.

Exercícios

Exercício

Mostre que $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Exercício

Aproximação de $f(x) = x^{1/3}$ *com um polinômio de Taylor de ordem 2 em* $x_0 = 8$. *Avalie a aproximação se* $7 \leq x \leq 9$.

Exercício

Seja $f(x) = x^{1/4}$. *Formula de Taylor-lagrange de ordem 2 para* f *no ponto* $x_0 = 16$ *e* $x = 17$. *Deduzir que* $\frac{8317}{4096} < 17^{1/4} < 65/32$.

Exemplos

Exercício

Mostre que $\operatorname{sen}(10^{-2}) = 10^{-2}$ *com erro inferior a* 5.10^{-5}.

Exercício

Seja $x > 0$ *Mostre que* $0 < e^x - 1 - x - x^2/2 < (x^3/6).e^x$

Exercício

Mostre que para todo $t > 1$

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln t < t - 1.$$

Exercícios: Formula de Taylor e aproximações

Exercício

Aproximação de $f(x) = x^{1/3}$ *com um polinômio de Taylor de ordem 2 em* $x_0 = 8$*. Avalie a aproximação se* $7 \leq x \leq 9$*.*

Exercício

Seja $f(x) = x^{1/4}$*. Formula de Taylor-lagrange de ordem 2 para* f *no ponto* $x_0 = 16$ *e* $x = 17$*. Deduzir que* $\frac{8317}{4096} < 17^{1/4} < 65/32$*.*

Exercícios: Formula de Taylor e desigualdades

Exercício

Seja $x > 0$ *Mostre que* $0 < e^x - 1 - x \leq (x^2/2).e^x$

Exercício

Mostre que para todo $x > 0$

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \mathrm{sen} x \leq x.$$

Exercícios: Formula de Taylor e cálculo de limites

Exercício

Calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-h}{h^2}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$.

Exercícios: Formula de Taylor e séries de potências

Exercício

Mostre que para $x > 0$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Exercício

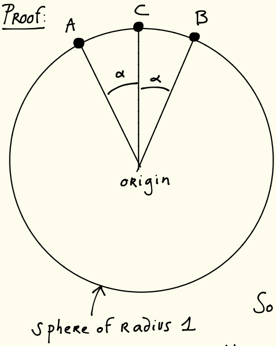
Mostre que $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$.

Aplicação: a distância do cos não é uma distancia

"Cosine distance is not a distance":

indeed, it does not satisfy the triangle inequality $d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,B)$

Proof:



Taylor's Formula: $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + (\operatorname{sen}\beta)\cdot\frac{\alpha^3}{6}$ for some $\beta \in (0,\alpha)$

Similarly, $\cos 2\alpha = 1 - \frac{(2\alpha)^2}{2} + (\operatorname{sen}\gamma)\cdot\frac{(2\alpha)^3}{6}$ for some $\gamma \in (0, 2\alpha)$

Hence: $d(A,C) = d(C,B) = 1 - \cos\alpha = \frac{\alpha^2}{2} - (\operatorname{sen}\beta)\cdot\frac{\alpha^3}{6} \leqslant \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6}$

So $d(A,C) + d(C,B) \leqslant \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{3}$

But $d(A,B) = 1 - \cos 2\alpha = 2\alpha^2 - (\operatorname{sen}\gamma)\frac{8\alpha^3}{3} \geqslant 2\alpha^2 - \frac{8\alpha^3}{3}$.

So for α small, $d(A,B) > d(A,C) + d(C,B)$.

How small? $2\alpha^2 - \frac{8\alpha^3}{3} > \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{3} \Leftrightarrow \alpha^2 > 3\alpha^3$ i.e $\alpha < \frac{1}{3}$

Conclusion: for angles $< \frac{1}{3}$ the triangle inequality fails.

Exercício: demonstração da formula de Taylor

Exercício

Mostre a formula de Taylor de ordem n para f entre a e b, aplicando o teorema de Rolle para:

$$g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A.\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

para um certo A bem escolhido.