MAT 1351 : Cálculo I

Aula Segunda 04/06/2018

Sylvain Bonnot (IME-USP)

Resumo

1. Primitivas
2. Primitivas com condições iniciais

Primitivas com condições iniciais

Exercício

Encontre a primitiva que satisfaça a condição inicial dada:

$$f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}; F(1) = 0$$

Exercício

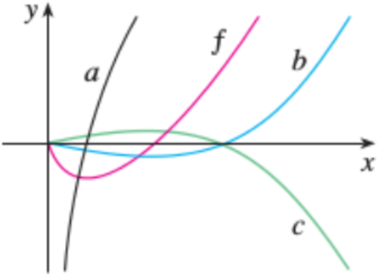
Encontre a função f:

1. $f'(t) = t + 1/t^3$ *com* $f(1) = 6$ *e* $t > 0$
2. $f'(x) = (x^2 - 1)/x$ *com* $f(1) = 1/2$ *e* $f(-1) = 0$
3. $f''(x) = 6x + \operatorname{sen} x$
4. $f''(x) = x^{-2}, x > 0$ *e* $f(1) = 0, f(2) = 0.$

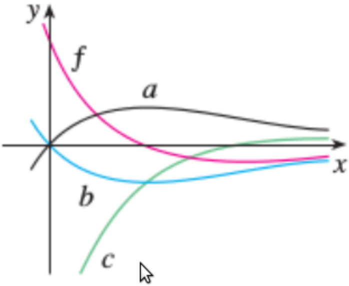
Gráficos e primitivas

Exercício

Reconhecer o gráfico de uma primitiva de f dentro de uma lista de possibilidades $(a, b, c, \ldots)$.



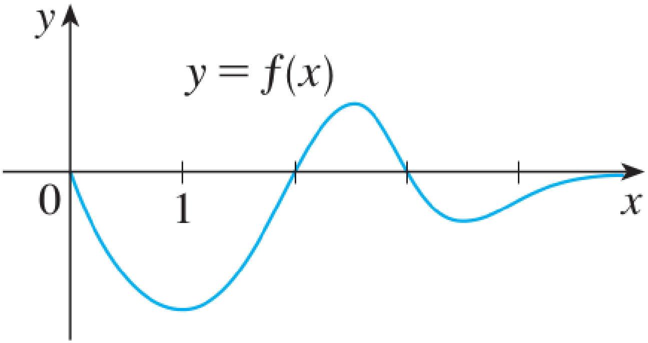
52.



Gráficos e primitivas II

Exercício

Faça um esboço de uma primitiva de f, *dado que* $F(0) = 1$.



Movimento de particula

Uma partícula move-se de acordo com os dados a seguir. Encontre a posição da partícula.

$v(t) = \text{sen}\, t - \cos t, \quad s(0) = 0$

$v(t) = 1{,}5\sqrt{t}, \quad s(4) = 10$

$a(t) = 2t + 1, \quad s(0) = 3, \quad v(0) = -2$

$a(t) = 3 \cos t - 2 \,\text{sen}\, t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 4$

$a(t) = 10 \,\text{sen}\, t + 3 \cos t, \quad s(0) = 0, \quad s(2\pi) = 12$

$a(t) = t^2 - 4t + 6, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = 20$

Formula de Taylor

Aproximação local de f derivável por uma função afim

A aproximação é dada por:

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0).$$

O erro feito na aproximação é $E(x)$ definido por:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + E(x).$$

Propriedade do erro:

$$\frac{E(x)}{x - x_0} \to 0 \text{ quando } x \to x_0.$$

Melhor aproximação:
se $L(x) = f(x_0) + m.(x - x_0)$ é tal que $\frac{f(x) - M(x)}{x - x_0} \to 0$ então $M = L$. Essa função é chamada **polinômio de Taylor de ordem 1 em volta de x_0.**

Expressão para o erro

Theorem

Seja f derivável até a segunda ordem no intervalo I e sejam x, x_0 em I. Então existe pelo menos um $\bar{x} \in (x, x_0)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2.$$

Demonstração: *seja $E(x)$ o erro e $h(x) = (x - x_0)^2$.*

1. *mostre que $E(x_0) = 0$ e $E'(x_0) = 0$ e também $h(x_0) = h'(x_0) = 0$*
2. *mostre a existência de $\bar{x}_1 \in (x_0, x)$ e $\bar{x} \in (x_0, \bar{x}_1)$ tais que*

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E'(\bar{x}_1)}{h'(\bar{x}_1)} = \frac{E''(\bar{x})}{h''(\bar{x})}.$$

Polinômio de Taylor

Definição

Seja f derivável até a ordem n em um intervalo aberto I e seja $x_0 \in I$.
O polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

é chamado Polinômio de Taylor, de ordem n de f em volta de x_0.

Teorema

(Formula de Taylor de ordem n em volta de x_0 com resto de Lagrange)
Se f é derivável até a ordem $n+1$ no intervalo aberto I e $x, x_0 \in I$, então existe pelo menos um s entre x e x_0 tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

onde $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Exemplos de formulas de Taylor-Lagrange

Formula de Taylor de ordem 1:

Teorema (Formula de Taylor de ordem n em volta de x_0 com resto de Lagrange)

Se f é derivável até a ordem 2 no intervalo aberto I e $x, x_0 \in I$, então existe pelo menos um s entre x e x_0 tal que

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x),$$

onde $R_1(x) = \frac{f''(s)}{2}(x - x_0)^2$.

Exercício

Encontre o polinômio de Taylor de ordem 1 de $f(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$ e o resto de Lagrange. Calcule um valor aproximado para $\ln(1,003)$ e avalie o erro. Fazer o mesmo para a ordem $s2$.

Exercícios

Exercício

Mostre que $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Exercício

Aproximação de $f(x) = x^{1/3}$ *com um polinômio de Taylor de ordem 2 em* $x_0 = 8$. *Avalie a aproximação se* $7 \leq x \leq 9$.

Exercício

Seja $f(x) = x^{1/4}$. *Formula de Taylor-lagrange de ordem 2 para* f *no ponto* $x_0 = 16$ *e* $x = 17$. *Deduzir que* $\frac{8317}{4096} < 17^{1/4} < 65/32$.

Exemplos

Exercício

Mostre que $\operatorname{sen}(10^{-2}) = 10^{-2}$ *com erro inferior a* 5.10^{-5}.

Exercício

Seja $x > 0$ *Mostre que* $0 < e^x - 1 - x - x^2/2 < (x^3/6).e^x$

Exercício

Mostre que para todo $t > 1$

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln t < t - 1.$$