MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo ultima aula

1. **Integrais trigonométricas e substituições do tipo** $x = \text{sen} u$ **,** $x = \cos u$**, ou** $u = \text{tg}(x/2)$: exemplo $\int \sqrt{1 - 4x^2} dx$
2. **Área de uma superfície de revolução**

$$S = \int_a^b 2\pi f(x).\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

3. **Integrais improprias:** exemplo de uma trombeta infinita:

$$V = \int_1^{+\infty} \pi. \left(\frac{1}{x^2}\right) dx := \pi. \lim_{r \to \infty} \int_1^r \pi. \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \pi. \lim_{r \to \infty} [-1/x]_1^r = \pi.$$

Integrais impróprias

Definição

Se $\int_a^t f(x)dx$ *existe para todo* $t \geq a$ *então:*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

desde que o limite exista (como um número, finito). Neste caso, a integral imprópria $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *é chamada convergente.*

Exercício

Determine a convergência das integrais:

1. $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$
2. $\int_4^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-1} dx$
3. $\int_2^{\infty} \frac{2x+1}{x^4-x^2} dx$

Teorema de comparação para as integrais impróprias

Teorema

Vamos supor que f *e* g *são contínuas com* $f(x) \geq g(x) \geq 0$ *para* $x \geq a$.

1. *Se* $\int_a^\infty f(x)dx$ *é convergente, então* $\int_a^\infty g(x)dx$ *é convergente.*
2. *Se* $\int_a^\infty g(x)dx$ *é divergente, então* $\int_a^\infty f(x)dx$ *é divergente também.*

Exercício

Mostrar que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ *é convergente se* $p > 1$ *e divergente se* $p \leq 1$.

Definição

Se $\int_t^b f(x)dx$ existe para todo $t \leq b$ então:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

desde que o limite exista (como um número, finito). Neste caso, a integral imprópria $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ é chamada convergente.

Definição

Se existe um c tal que $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ e $\int_c^{\infty} f(x)dx$ são convergentes, então dizemos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ é convergente.

Energia potencial

Gravitao: a energia potencial de uma massa m no ponto P à distância R do centro da terra é igual a menos o trabalho necessário para mover m do infinito até essa posição:

$$U = -\int_{\infty}^{R} \vec{F}.\vec{d}r,$$

onde a força gravitational $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$.
Consequência:

$$U = -\int_{\infty}^{R} -\frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r}.$$

Integrais impróprias, segundo tipo

Definição

Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

se esse limite existir (como um número real finito), e a integral imprópria é chamada convergente (divergente, se não).
Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

se esse limite existir (como um número real finito).
Se f tiver uma descontinuidade em c, com $a < c < b$ e $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ forem convergentes, então podemos definir: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Exercício

Calcule:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.001}}$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$
4. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$
5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$
6. $\displaystyle\int_{-8}^{1} \frac{dx}{x^{1/3}}$
7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dr}{r^{0.999}}$
9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$
10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$

Exemplos 2

Exercício

Convergente ou divergente?

41. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin t}$

42. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t - \sin t}$ ($t \geq \sin t$ $t \geq 0$)

43. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{1 - x^2}$

44. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{1 - x}$

45. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx$

46. $\displaystyle\int_{-1}^{1} -x \ln|x|\,dx$

47. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$

48. $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$

49. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v - 1}}$

50. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{1 + e^{\theta}}$

51. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 1}}$

52. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

53. $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\sqrt{x + 1}}{} dx$

54. $\displaystyle\int^{\infty} \frac{x\,dx}{}$

Mais exemplos de integrais improprias do tipo 2

Exercício

Calcule as integrais:

1. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$
2. $\int_0^{10^{-10}} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr$ *Interpretação?*
3. $\int_0^1 \frac{1}{1-e^x} dx$

Exercício

Mostrar:

1. *para* $p \geq 1$ *a integral* $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ *diverge.*
2. *para* $p < 1$ *a integral* $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ *converge.*

Equações diferenciais

Definição

Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função y que aparece na equação também com as derivadas de y.

Exemplos: $y' = 3y + 1, y'' = -y, y.y' = 2y''$.
O primeiro teorema é muito intuitivo:

Teorema

As soluções da equação $y' = 0$ num intervalo (a, b) são exatamente as funções constantes.

Teorema

As soluções da equação $y' = k.y$ num intervalo (a, b) são exatamente as funções

$$y(t) = C.e^k t, \text{ onde } C \text{ é uma constante.}$$

Solução de $y' = ky$

Prova: E facil de ver que $y(t) = C.e^k t$ são soluções. Agora seja $g(t)$ uma solução. Vamos definir uma nova função

$$h(t) = g(t).e^{-kt}$$

Então $h'(t) = g'(t).e^{-kt} + g(t)(-k.e^{-kt}) = kg(t)e^{-kt} - kg(t).e^{-kt} = 0$.
Isso implica que $h(t) = Constante = C$, e depois que $g(t) = C.e^{kt}$.

Equação $y' = ky + b$.