MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Regra da Substituição

Teorema

Se $u = g(x)$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo I e f for continua em I então

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du$$

Teorema

Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na variação de $u = g(x)$ então

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Regra da Substituição para integrais definidas:

61. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \tan x)\, dx$

62. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \sin(\sin x)\, dx$

63. $\displaystyle\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

64. $\displaystyle\int_0^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

65. $\displaystyle\int_0^{a} x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

66. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \sin x\, dx$

67. $\displaystyle\int_1^{2} x\sqrt{x - 1}\, dx$

68. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$

69. $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

71. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^z + 1}{e^z + z}\, dz$

72. $\displaystyle\int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T - \alpha)\, dt$

$\displaystyle\int^{1} \frac{dx}{\ }$

Integração por partes

Derivada de um produto:

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

Ou, também:

$$f(x)g'(x) = [f(x).g(x)]' - f'(x).g(x)$$

Teorema (Regra de integração por partes)

Vamos supor que $f'(x).g(x)$ tem uma primitiva, então:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

Outra notação: podemos fazer $u = f(x)$ e $v = g(x)$, então $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ e

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplos: Integração por partes, integrais indefinidas

Exercício

Calcule:

1. $\int x.e^x dx$ *(Resp:* $e^x(x-1)+C$
2. $\int ln(x)dx$ *(Resp:* $x.ln(x)-x+C$*)*
3. $\int (lnx)^2 dx$ *(Resp:* $2x-2x.ln(x)+x(ln(x))^2+C$*)*
4. $\int x\mathrm{sen}x dx$ *(Resp:* $-x.\cos x+\mathrm{sen}x+C$ *)*

Integração por partes para integrais definidas

Teorema

Sejam f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a, b]$, então:

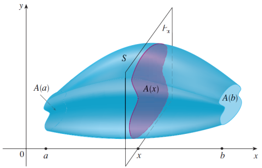
$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx$$

Exercício

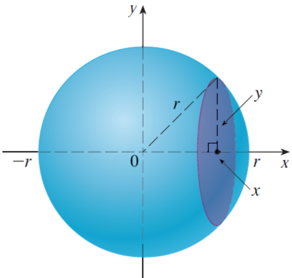
Calcule:

1. $\int_0^1 x.e^x dx$
2. $\int_0^{\pi/2} e^x.\cos x dx$
3. $\int_0^x t^2.e^{-st} dt$
4. $\int_1^2 \ln x dx$

Ideia: cortar o objeto em cilindros de base $A(x)$ e altura dx, e depois fazer a soma $\int_a^b A(x)dx$, onde $A(x)$ é a área da secção transversal.

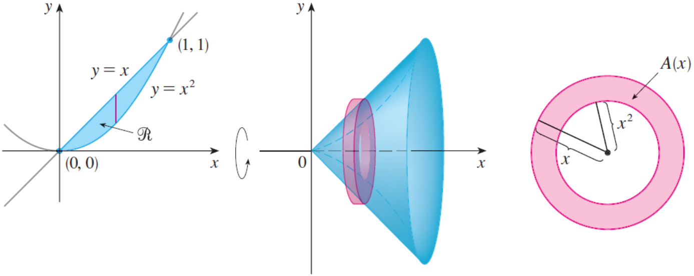


Exemplo da esfera de raio r: aqui $A(x) = \pi.y^2 = \pi.(r^2 - x^2)$.



Volumes dos sólidos de revolução

São sólidos obtidos pela rotação de uma região ao redor de um eixo.
Método 1: método dos "anéis"



Aqui a área da secção transversal é simplesmente:

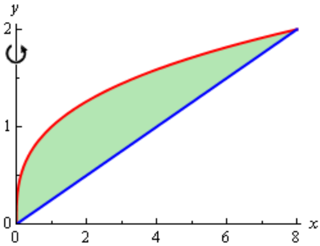
$$A(x) = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2 = \text{ area de um anel}$$

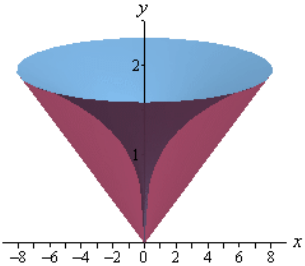
Exemplo:

Exercício

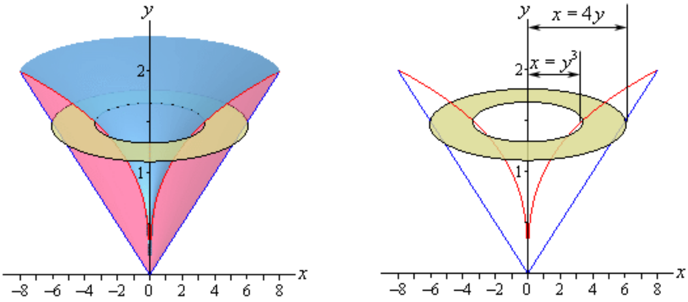
Determine o volume do solido obtido pela rotação da região S ao redor do eixo y. A região S é a região em $x \geq 0, y \geq 0$ entre os gráficos de $y = x/4$ e $y = \sqrt[3]{x}$

Região S:





Exemplo:



Secção transversal:

$$A(y) = \pi((4y)^2 - (y^3)^2) = \pi.(16y^2 - y^6)$$

Volume:

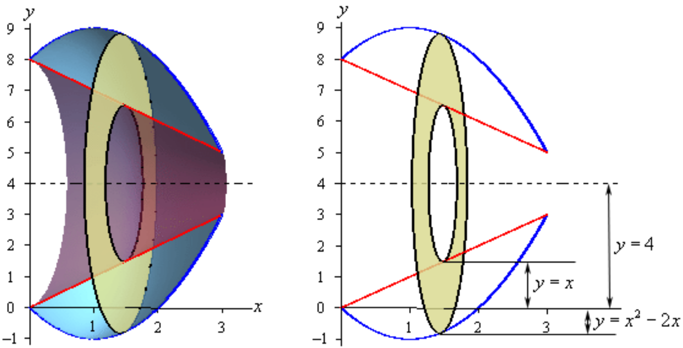
$$V = \int_0^2 A(y)dy = \pi.\int_0^2 16y^2 - y^6 dy = \pi.[\frac{16}{3}y^3 - \frac{1}{7}y^7]_0^2 = \frac{512}{21}\pi$$

Mais exemplos:

Exercício

Determine o volume do solido obtido pela rotação da região S ao redor da reta $y = 4$. A região S é a região entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2 - 2x$

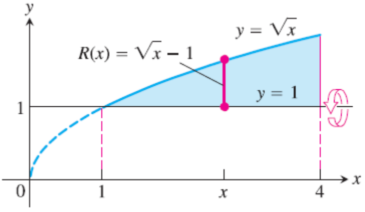
Região S



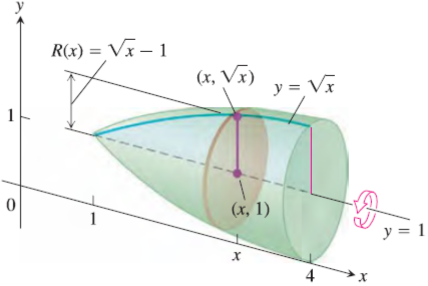
Exercício

Determine o volume do solido abaixo.

Região S



(a)

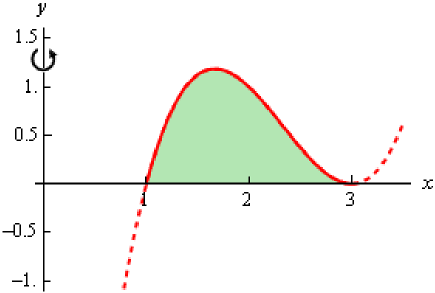


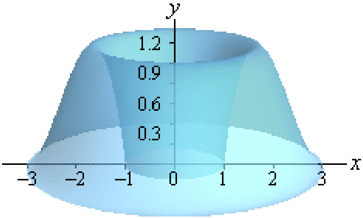
(b)

Exercício

Determine o volume do solido abaixo, onde $y = (x-1)(x-3)^2$

Região S



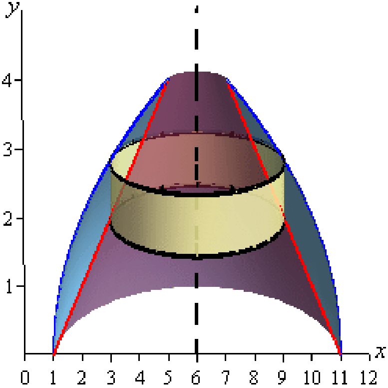


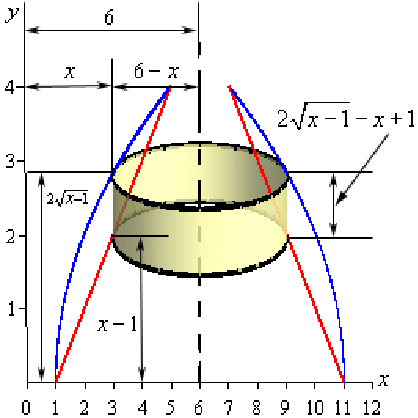
Método das cascas cilíndricas II

Exercício

Determine o volume do solido abaixo, onde as duas curvas são $y = (x-1)$ *e* $y = 2\sqrt{x-1}$.

Região S





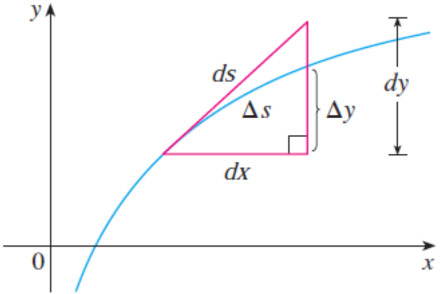
Comprimento de gráfico

Formula do comprimento:

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Porque? Para um pedaço de gráfico, o comprimento é

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$



Exemplos de cálculo de comprimentos de gráficos

Exercício

Calcule o comprimento do gráfico da função dada:

1. $y = (2/3)x^{3/2}$ *para* $0 \leq x \leq 1$ *(Resp:* $(2/3)(2\sqrt{2} - 1)$*).*
2. $y = x^3$ *para* $0 \leq x \leq 2$*;*

Comprimento de curva em forma paramétrica

Isso significa que a curva é dada como:

$$x = x(t) \text{ e } y = y(t),$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções de um paramétro $t \in I$.
Exemplos: parabola $x(t) = t, y(t) = t^2$. Circulo: $(\cos t, \text{sen} t)$.

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Comprimento da circunferência de raio R.

Exercício

Calcule o comprimento da curva dada em forma paramétrica:

1. $x = 3t \text{ e } y = 2t^{3/2}\ , 0 \leq t \leq 1.$
2. $x = 2t + 1 \text{ e } y = t - 1\ , 1 \leq t \leq 2.$

Área de um semicirculo de raio 1:

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$$

Podemos fazer $x = \operatorname{sen} u$, então $\cos(u) = \sqrt{1 - x^2}$ e $dx = \cos(u)du$. Assim podemos obter: (lembra que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)\cos(u)du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2u))/2du = \pi/2$$

Exercício

Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Ja sabemos o resultado arc* $- \operatorname{sen}(x) + C$, *mas aqui podemos fazer a substituição* $x = \operatorname{sen}(u)$.

Exercício

Fazer $x = tg(u)$ *para calcular* $\int \frac{dx}{x^2 . \sqrt{1+x^2}}$.

Mais exemplos

Exercício

Antiderivada de $1/\text{sen}x$**:** *Fazer* $u = \text{tg}(x/2) \Rightarrow x = 2tg^{-1}(u)$ *e* $dx = 2du/(1+u^2)$. *Agora* $1+u^2 = 1/(\cos(x/2))^2$ *e* $\frac{2u}{1+u^2} = \text{sen}x$. *Fazer agora a substituição.*

Observação: a mudança $u = tg(x/2)$ é muito util:

1. mostrar que $dx = \frac{2du}{1+u^2}$
2. mostrar que $\text{sen}x = \frac{2u}{1+u^2}$
3. mostrar que $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Conclusão: cada fração racional com cos , sen pode ser escrita como uma fração racional normal, em u!

Mais exemplos

Exercício

Calcule as antiderivadas:

1. $\int \sqrt{1-4x^2}dx$
2. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$
3. $\int \frac{dx}{1+\mathrm{sen}x}$ (*fazer* $u = tg(x/2)$).
4. $\int \frac{1}{\cos x}dx$

Área de uma superfície de revolução