MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Limite e continuidade para funções: uso de coordenadas polares

Exercício

Determine o limite se existir, utilizando coordenadas polares.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$$

Pontos de continuidade

Exercício

Determine o conjunto dos pontos de continuidade.

1. $f(x,y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$
2. $f(x,y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Exercício

Prove que se f for contínua em (x_0, y_0) com $f(x_0, y_0) > 0$ então existe $r > 0$ tal que $f(x,y) > 0$ para todo (x,y) na bola de centro (x_0, y_0) e raio r.

Exercício

Seja f contínua em A aberto de $\mathbb{R}^2$ e seja $c \in R$. Prove que o conjunto $\{(x,y); f(x,y) < c\}$ é aberto.

Derivadas parciais

Definição: seja uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in D_f$. Podemos estudar:

$$y \mapsto f(x_0, y),$$

onde aqui $x = \textit{constante} = x_0$. Então isso é uma nova função de uma variável:

$$g : y \mapsto g(y) = f(x_0, y).$$

Então podemos perguntar, se $g'(y)$ existe ou não.

Definição

Se a derivada de $y \mapsto f(x_0, y) = g(y)$ *existe no ponto* y_0*, dizemos que* f *tem uma derivada parcial em relação a* y *no ponto* (x_0, y_0)*, igual a* $g'(y_0)$*.*

Definição

Se a derivada de $x \mapsto f(x, y_0) = h(x)$ *existe no ponto* x_0*, dizemos que* f *tem uma derivada parcial em relação a* x *no ponto* (x_0, y_0)*, igual a* $h'(x_0)$*.*

Derivadas parciais

Notação: a derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_0, y_0) é denotada por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Notação: a derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0, y_0) é denotada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Definição

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Definição

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Exemplos

Exercício

Calcule as derivadas parciais:

$f(x, y) = y^5 - 3xy$	$f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$
$f(x, t) = e^{-t}\cos \pi x$	$f(x, t) = \sqrt{x}\ln t$
$z = (2x + 3y)^{10}$	$z = \tan xy$
$f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$	$f(x, y) = x^y$
$w = \sin \alpha \cos \beta$	$w = e^v/(u + v^2)$
$f(r, s) = r\ln(r^2 + s^2)$	$f(x, t) = \arctan\left(x\sqrt{t}\right)$
$u = te^{w/t}$	$f(x, y) = \displaystyle\int_y^x \cos(t^2)\, dt$
$f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$	$f(x, y, z) = x\sin(y - z)$
$w = \ln(x + 2y + 3z)$	$w = ze^{xyz}$
$u = xy\sin^{-1}(yz)$	$u = x^{y/z}$

Exemplos

Exercício

Calcule as derivadas parciais:

$f(x, y) = y^5 - 3xy$	$f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$
$f(x, t) = e^{-t}\cos \pi x$	$f(x, t) = \sqrt{x} \ln t$
$z = (2x + 3y)^{10}$	$z = \tan xy$
$f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$	$f(x, y) = x^y$
$w = \sin \alpha \cos \beta$	$w = e^v/(u + v^2)$
$f(r, s) = r \ln(r^2 + s^2)$	$f(x, t) = \arctan\left(x\sqrt{t}\right)$
$u = te^{w/t}$	$f(x, y) = \int_y^x \cos(t^2)\, dt$
$f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$	$f(x, y, z) = x \sin(y - z)$
$w = \ln(x + 2y + 3z)$	$w = ze^{xyz}$
$u = xy \sin^{-1}(yz)$	$u = x^{y/z}$

Funções derivadas parciais

Notação: Vamos supor que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe para todo (x, y). Então podemos definir uma função:

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y)$$

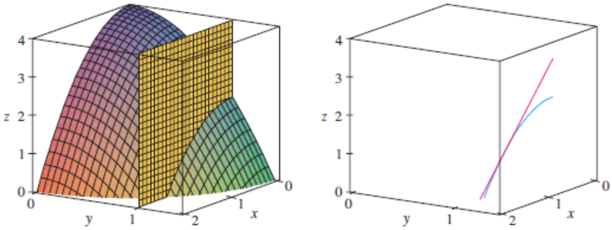
Exercício

Considere a função $z = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. *Verifique que* $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

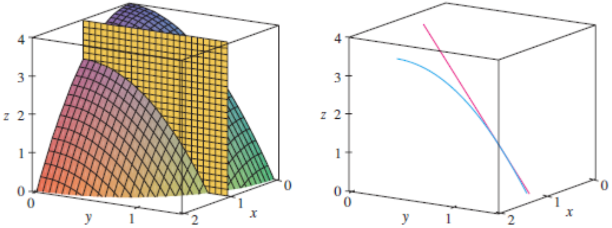
Exercício

Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\phi'(1) = 4$. *Seja* $g(x, y) = \phi(x/y)$. *Calcule as derivadas parciais no ponto* $(1, 1)$.

Corte $y = constante$



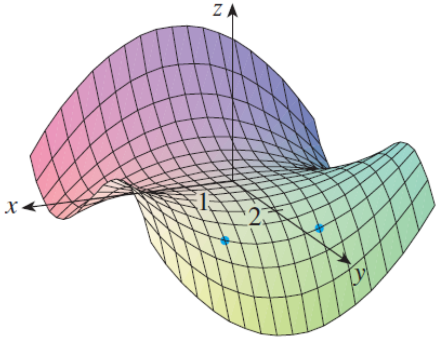
Corte $x = constante$



Interpretação geometrica

Exercício

Determine o sinal das derivadas parciais:



$f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$

$f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$

Derivadas parciais e continuidade

Exercício

Mostre que $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *(se* $(x,y) \neq (0,0)$*) e* $f(0,0) = 0$ *tem derivadas parciais na origem, mas não é contínua.*

Derivadas parciais de ordens superiores

Definição

Vamos supor que f_x tem derivadas parciais. Então podemos definir $(f_x)_x = f_{xx}$ e $(f_x)_y = f_{xy}$.

Definição

Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dita de classe C^2 se f admitir todas as derivadas parciais de ordem 2 contínuas em A

Teorema

Seja f de classe C^2 então:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Derivadas parciais de ordens superiores

Exercício

Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem

$$f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y \qquad f(x, y) = \sin^2(mx + ny)$$

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} \qquad v = \frac{xy}{x - y}$$

$$z = \arctan \frac{x + y}{1 - xy} \qquad v = e^{xe^y}$$

Derivadas parciais de ordens superiores

Exercício

Calcule todas as derivadas parciais indicadas

$$f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2; \quad f_{xxy}, \quad f_{yyy}$$

$$f(x, t) = x^2e^{-ct}; \quad f_{ttt}, \quad f_{txx}$$

$$f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z); \quad f_{xyz}, \quad f_{yzz}$$

$$f(r, s, t) = r\ln(rs^2t^3); \quad f_{rss}, \quad f_{rst}$$

$$u = e^{r\theta}\sin\theta; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial r^2\,\partial\theta}$$

$$z = u\sqrt{v - w}\,; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial u\,\partial v\,\partial w}$$

$$w = \frac{x}{y + 2z}; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}$$