MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo da ultima aula: funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Teorema (regras de Leibniz (i.e derivadas de produtos))

Sejam $\vec{F}, \vec{G} : A \to \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$ deriváveis em A. Então $f.\vec{F}$ e $\vec{F}.\vec{G}$ são também deriváveis e, se $n = 3$, $\vec{F} \times \vec{G}$ também, e:

1. $\frac{d}{dt}(f.\vec{F}) = \frac{df}{dt}.\vec{F} + f.\frac{d\vec{F}}{dt}$
2. $\frac{d}{dt}(\vec{F}.\vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt}.\vec{G} + \vec{F}.\frac{d\vec{G}}{dt}$
3. $\frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \times \vec{G} + \vec{F} \times \frac{d\vec{G}}{dt}$

Uma curiosidade: so existe um produto vetorial em dim 1,3,7.

$\times$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	0	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	0	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	0	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	0	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	0

Funções de várias variáveis reais a valores reais

Exemplo: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Definição

O domínio da função é o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $f(x, y)$ *é definida.*

Exercício

Determine o domínio de $f(x, y) = \frac{x-y}{x+2y}$. *Calcule* $f(2u + v, v - u)$.

Exercício

Para $f(x, y) = 3x + 2y$, *calcule* $\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$

Determinação do domínio

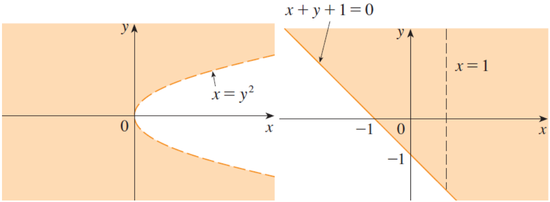


Figura : dominio de $f(x,y) = x.\ln(y^2 - x)$ e de $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

Exercício

Determine o domínio das funções abaixo:

$$f(x, y) = \sqrt{x + y}$$

$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$

$$f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{y - x}\,\ln(y + x)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$$

Domínios de funções

Exercício

Representa graficamente o domínio de $z = f(x,y)$.

1. $\frac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
2. $z^2 + 4 = x^2 + y^2, z \leq 0.$
3. $z = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{2x - y}$

Definição

Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é homogênea de grau* λ *se*

$$f(tx, ty) = t^{\lambda} f(x,y).$$

Exercício (Homogenização de um polinômio)

Seja $P(x)$ *um polinômio de grau* n. *Mostre que* $y^n.P(x/y)$ *é homogênea de grau* n.

Exemplos de funções homogêneas

Exercício

Verifique se f é homogênea:

1. $f(x,y) = \frac{x^3+2xy^2}{x^3-y^3}$
2. $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$.
3. $f(x,y) = 5x^3y + x^4 + 3$.

Gráficos de funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definição

O gráfico de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é o conjunto*

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x,y) \text{ onde } (x,y) \in D_f\}.$$

Exercício

Esboce o gráfico das funções abaixo:

$f(x, y) = 3$	**22.** $f(x, y) = y$
$f(x, y) = 10 - 4x - 5y$	**24.** $f(x, y) = \cos x$
$f(x, y) = y^2 + 1$	**26.** $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$
$f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$	
$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$	
$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$	

Gráficos de funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: alguns gráficos detalhados

Gráfico de: $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

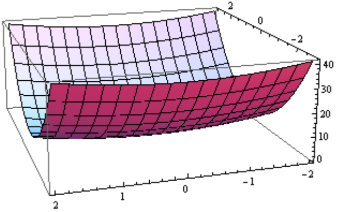
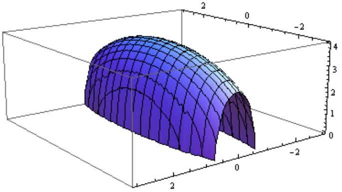


Gráfico de: $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$



Gráficos de funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: recohnecer um gráfico

Método 1: desenhar algumas cortes do gráfico com planos verticais $(x = \mathit{constante})$ e $(y = \mathit{constante})$.

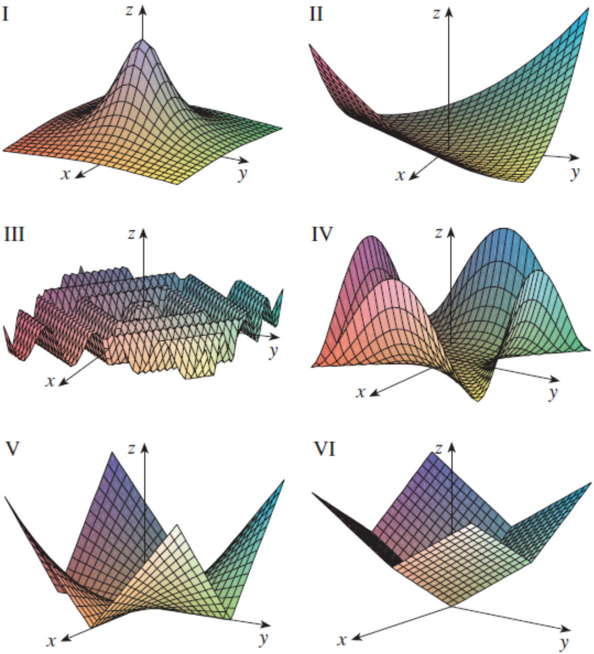
Exercício

Quais são os gráficos das funções abaixo?

$$f(x,y) = |x| + |y| \qquad f(x,y) = |xy|$$

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} \qquad f(x,y) = (x^2 - y^2)^2$$

$$f(x,y) = (x-y)^2 \qquad f(x,y) = \sin(|x| + |y|)$$

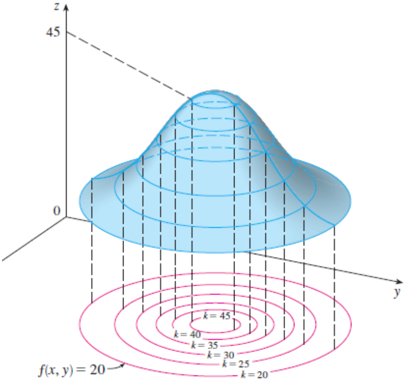

I
z
x
y
II
z
x
y
III
z
x
y
IV
z
x
y
V
z
x
y
VI
z
x
y

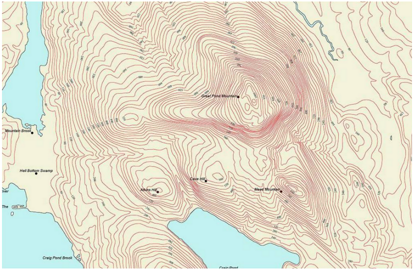
Curvas de nível

Definição

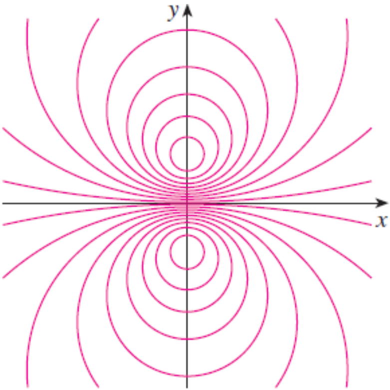
*As **curvas de nível** de uma função $f(x,y)$ são as curvas de equação $f(x,y) = k$ onde k é uma constante na imagem de f.*

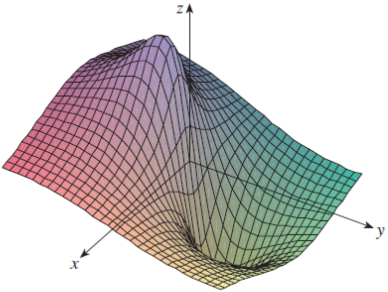
Relação com os cortes horizontais:



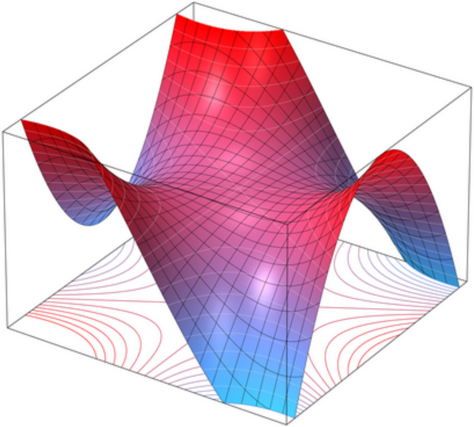


As duas representações juntas: $f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$

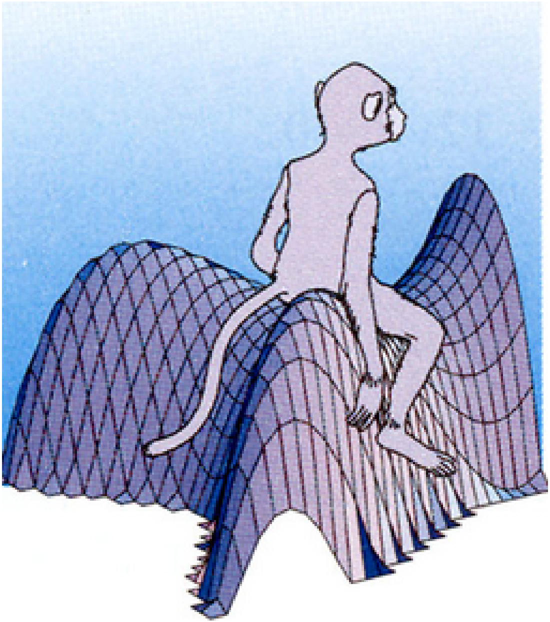




O gráfico de $f(x,y) = xy^2 - x^3$



O gráfico de $f(x,y) = xy^2 - x^3$



Exercício

Faça o mapa de contorna das funções:

$f(x, y) = (y - 2x)^2$	$f(x, y) = x^3 - y$
$f(x, y) = y - \ln x$	$f(x, y) = e^{y/x}$
$f(x, y) = ye^x$	$f(x, y) = y \sec x$
$f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$	$f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

Exercício

Faça uma correspondência entre as funções e os mapas de contorno.

$z = \sin(xy)$	$z = e^x \cos y$
$z = \sin(x - y)$	$z = \sin x - \sin y$
$z = (1 - x^2)(1 - y^2)$	$z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

Reconhecer os mapas de contorno