MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo da ultima aula:

Exercício

1. *Mostre que* $p = (a, b) \in A$ *é um ponto interior de* A *se e somente se: existe um quadrado* $C = (a - \delta, a + \delta) \times (b - \delta, b + \delta)$ *com centro em* p *tal que* $C \subset A$*;*
2. *Mostre que* $y = x$ *é um conjunto fechado de* $\mathbb{R}^2$.

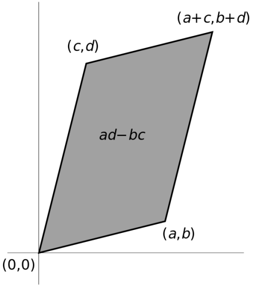
Definição

Seja $\vec{e}$ *o vetor unitário na direção de* $\vec{u}$ *(isto é* $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$*). A projeção de* $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u}$*,* $proj_{\vec{u}}\vec{v}$ *pode ser definida como*

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \lambda \vec{e} = \frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|\vec{x}\|}\vec{e}.$$

Determinante de ordem 2:

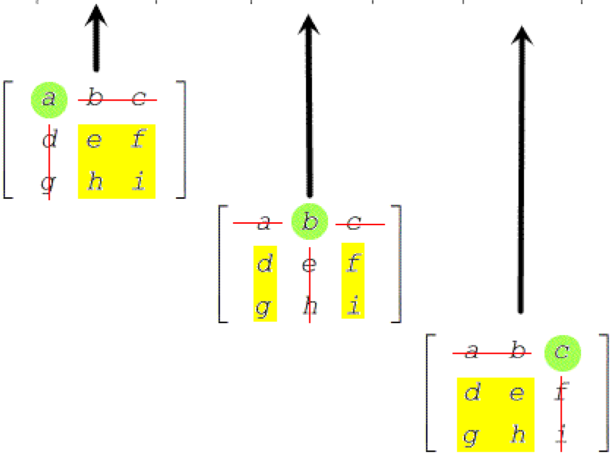
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



Interpretação geométrica: O valor absoluto do determinante é a área do paralelogramo formado pelos vetores (a, b) e (c, d).

Determinante 3×3: expansão de Laplace

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$



Produto vetorial, em $\mathbb{R}^3$

Formula para $\vec{u} \wedge \vec{v}$ também escrito como $\vec{u} \times \vec{v}$:
dados $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (b_1 c_2 - c_1 b_2)\vec{i} + (a_2 c_1 - a_1 c_2)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Produto vetorial e determinante:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Lemma

$\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Produto vetorial

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 \\
&= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 - a_1a_2b_3 + b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Teorema

Seja $\theta \in [0, \pi]$ o angulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, então:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{v}\|\text{sen}\theta$$

Produto vetorial: interpretação geométrica do produto vetorial

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 \\
&\qquad + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

Como justificar essa equação?

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 + \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2$$

Os quaterníons $\mathbb{H}$ de Hamilton: uma generalização de $\mathbb{C}$

Definição

Um quaternion é uma soma $a + bi + cj + dk$ onde $a, b, c, d \in R$ e i, j, k satisfazem:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k$$

$$jk = i$$

$$ki = j$$

Definição

O conjugado de $q = a + bi + cj + dk$, é definido por $\bar{q} = a - bi - cj - dk$. A norma de q é $N(q) = \sqrt{q.\bar{q}} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Produto de quaterníons e Norma

Lemma

O produto
$(q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)(r_0 + ir_1 + jr_2 + kr_3) = (t_0 + it_1 + jt_2 + kt_3)$ *onde:*

$$
\begin{aligned}
t_0 &= (r_0q_0 - r_1q_1 - r_2q_2 - r_3q_3) \\
t_1 &= (r_0q_1 + r_1q_0 - r_2q_3 + r_3q_2) \\
t_2 &= (r_0q_2 + r_1q_3 + r_2q_0 - r_3q_1) \\
t_3 &= (r_0q_3 - r_1q_2 + r_2q_1 + r_3q_0)
\end{aligned}
$$

Exercício

Mostre que $N(q_1.q_2) = N(q_1)N(q_2)$.

Observação

Um quaternion $s_1 + is_2 + js_3 + ks_4$ *pode ser escrito como* $(s_1, \vec{v}_1)$ *onde* $\vec{v}_1 = (s_2, s_3, s_4)$. *O produto* $q_1.q_2 = (s_1, \vec{v}_1).(s_2, \vec{v}_2)$ *é igual a* $(s_1s_2 - \vec{v}_1.\vec{v}_2, s_1\vec{v}_2 + s_2\vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$.

Produto de quaterníons e Norma II

Lemma

Sejam $q_1 = (0, \vec{v}_1) = (0, a_1, a_2, a_3)$ *e* $q_2 = (0, \vec{v}_2) = (0, b_1, b_2, b_3)$. *Então* $(N(q_1).N(q_2))^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$. *Também*

$$q_1.q_2 = (-\vec{v}_1.\vec{v}_2, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \implies N^2(q_1.q_2) = (\vec{v}_1.\vec{v}_2)^2 + \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|^2$$

Podemos comparar com a mesma situação com números complexos:

Lemma

Sejam $u = a + bi$ *e* $v = c + di$. *Então* $|a + bi|^2 = a^2 + b^2$ *e* $|c + di|^2 = c^2 + d^2$, *mas também*

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= |a + bi|^2.|c + di|^2 \\ &= |(a + bi).(c + di)|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2\end{aligned}$$

Funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Imagem de F**:** a imagem de F é o conjunto de todos os pontos $F(t), t \in \mathbb{R}$. É uma curva em $\mathbb{R}^3$.

Exercício

Desenhe a imagem:

1. $F(t) = (t, t, 1), t \geq 0$
2. $F(t) = (t, t, 1 + \text{sen}t), t \geq 0$
3. $F(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\text{sen}t, e^{-t}), t \geq 0$

Operações com funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:

Definição

Seja $F(t) = (F_1(t), \ldots, F_n(t))$*. As funções* $F_i(t)$ *são chamadas as funções componentes de* F*.*

Funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ contínuas e diferenciáveis

Teorema

Seja $F = (F_1, \dots, F_n)$ *uma função de uma variável com valores em* $\mathbb{R}^n$ *e* $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$. *Então*

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} F_i(t) = L_i$$

Teorema

$F : A \to \mathbb{R}^n$ *é **contínua** se e somente se cada componente* F_i *é continua.*

Teorema

Sejam $F = (F_1, \dots, F_n)$ *e* t_0 *no domínio de* F. *Então* F *é derivável em* t_0 *se e somente se cada componente de* F *for derivável em* t_0 *e a derivada* $F'(t_0)$ *é definida como:*

$$F'(t_0) := (F_1'(t_0), F_2'(t_0), \dots, F_n'(t_0))$$

Funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ contínuas e diferenciáveis: exemplos

Exercício

Calcule

$$\lim_{t \to 1} \vec{F}(t), \text{ onde } \vec{F}(t) = \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}, t^2, \frac{t - 1}{t} \right)$$

Exercício

Sejam $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^3$ *e* $\vec{G} : A \to \mathbb{R}^3$ *tais que* $\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = 0$ *e* $\|\vec{G}(t)\| \leq M$ *para todo* $t \in A$. *Prove*

1. $\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t).\vec{G}(t) = 0$
2. $\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) \times \vec{G}(t) = \vec{0}$

Funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ diferenciáveis

Definição (Vetor tangente, reta tangente)

Seja $F : A \to \mathbb{R}^n$ *derivável em* t_0 *com* $\frac{dF}{dt}(t_0) \neq 0$. *Nós dizemos que* $\frac{dF}{dt}(t_0)$ *é um vetor tangente à trajetória de* F *em* t_0. *A reta tangente* T *à trajetória de* F *no ponto* $F(t_0)$ *é definida pela parametrização*

$$T = F(t_0) + \lambda \frac{dF}{dt}(t_0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Teorema

Sejam $\vec{F}, \vec{G} : A \to \mathbb{R}^n$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *deriváveis em* A. *Então* $f.\vec{F}$ *e* $\vec{F}.\vec{G}$ *são também deriváveis e, se* $n = 3$, $\vec{F} \times \vec{G}$ *também, e:*

1. $\frac{d}{dt}(f.\vec{F}) = \frac{df}{dt}.\vec{F} + f.\frac{d\vec{F}}{dt}$
2. $\frac{d}{dt}(\vec{F}.\vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt}.\vec{G} + \vec{F}.\frac{d\vec{G}}{dt}$
3. $\frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \times \vec{G} + \vec{F} \times \frac{d\vec{G}}{dt}$