MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

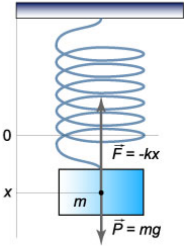
Informações gerais

- **Prof.:** Sylvain Bonnot
- **Email:** sylvain@ime.usp.br
- **Minha sala:** IME-USP, 151-A (Bloco A)
- **Site:** ver o link para MAT 121 na pagina `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html` Nessa página: as notas de aulas, informações gerais, listas de exercícios (com soluções...), etc...

- **Monitoria:** aguardando para ver se tem um...
- **Avaliação:** as informações vão aparecer no site

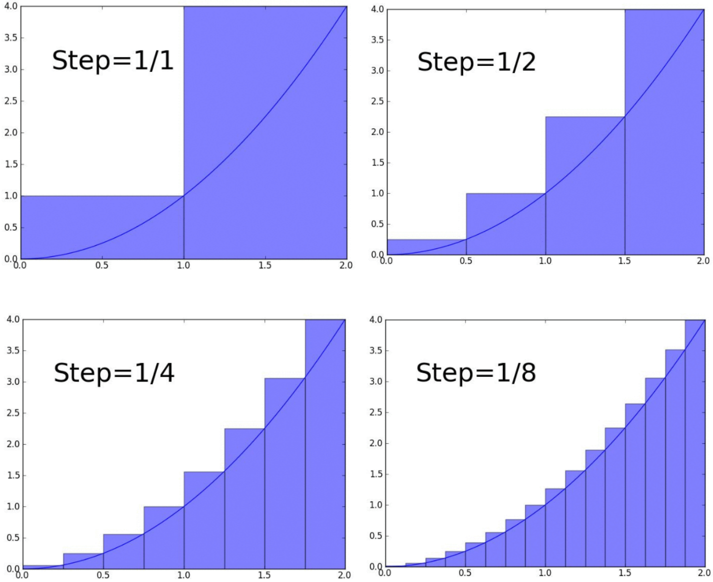
Resumo da aula 1

- **Objetivo do curso Cálculo II:** refazer Cálculo I em dimensão 2.
- **Integrais na física**: Exemplo da queda livre :
  equação diferencial $x'' = g \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$ (porque?)
- **Integrais na física**: Lei de Newton $\Leftrightarrow$ conservação da energia
- **Oscilador harmônico:**

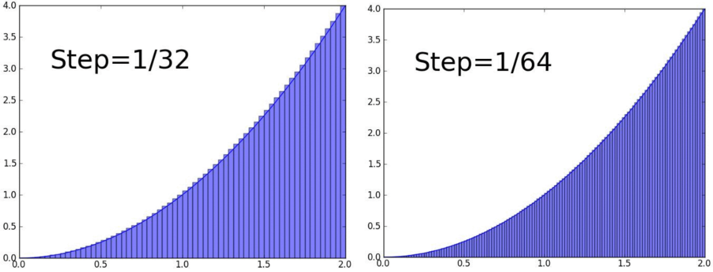


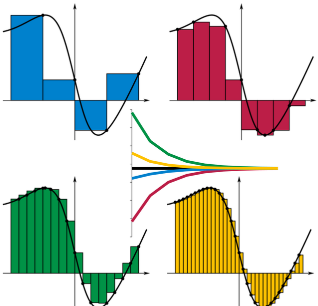
$$\boxed{mx'' = -kx \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = constante}$$

Integrais e área: subdivisão e aproximação



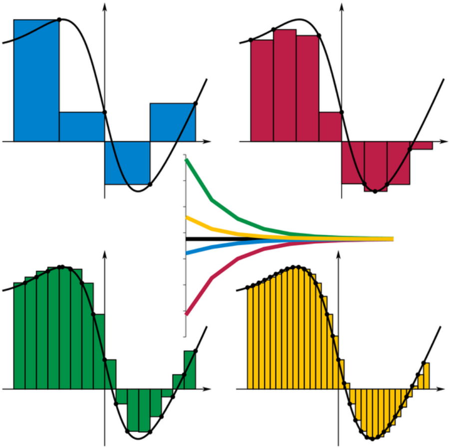
Integrais e área: subdivisão e aproximação





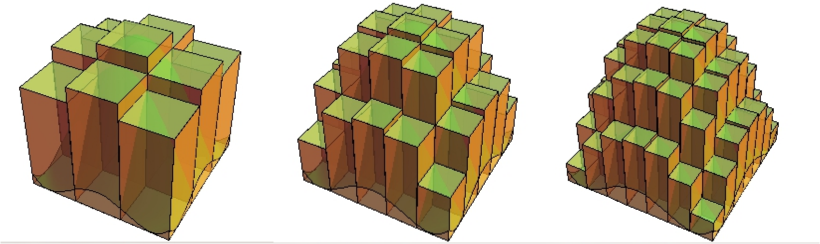
Como escolher um ponto dentro de cada intervalo da subdivisão?

Possibilidades: ponto esquerdo, direito de cada sub-intervalo, ponto medio, ponto onde f tem um máximo, ponto onde f tem um mínimo.

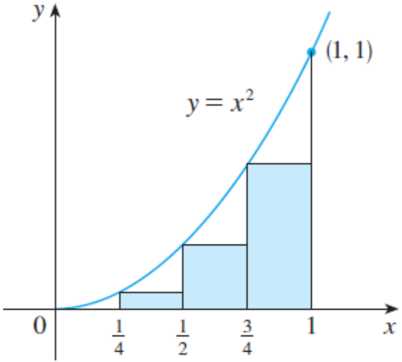


Exemplo em dimensão 2:

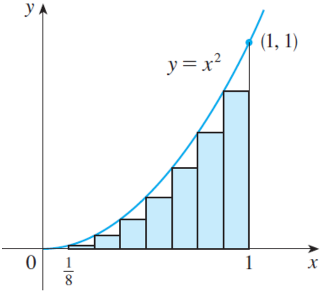
Volume abaixo de um gráfico: $F(x, y) = 2 - 2\text{sen}(x^2 + y^2)$.



Subdivisão e aproximação: Aproximar com retângulos: obter uma estimativa inferior da área: aqui $area(S) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geq L_1 + L_2 + L_3 + L_4$. Os retângulos têm a mesma base $= 1/4$ e alturas $0, (1/4)^2, (2/4)^2, (3/4)^2$.

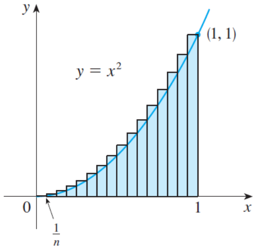


Aproximar com 8 retângulos: estimativa inferior e superior da área: usando extremos esquerdos e direitos dos intervalos



Aproximando com n retângulos

Tomando o limite: vamos dividir $[0,1]$ em n intervalos iguais, construir retângulos usando os extremos direitos, calcular a soma das áreas dos n retângulos e fazer $n \to \infty$.



$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \end{aligned}$$

Somas uteis:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Tomando o limite

Soma das áreas de n retângulos: também chamada soma de Riemann.

$$R_n = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \to \frac{1}{3}$$

(Porque?)

Integral definida: a integral de Riemann

Definição

Seja f uma função contínua em $[a,b]$. Podemos dividir $[a,b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1], \ldots [x_{n-1}, x_n]$ de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Em cada $[x_{i-1}, x_i]$ vamos escolher um ponto amostral $x_i^\star$. Então a integral definida de f de a para b é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$$

Teorema

Se f é continua em $[a,b]$ ou tem um número finito de descontinuidades, então a integral de f de a para b existe.

Vocabulario: $f(x)$=integrando, a, b são os limites de integração (inferior e superior).

Definição

A soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$ é chamada uma "soma de Riemann"

Exemplos

Exercício

Se $f(x) = \sqrt{x} - 2, 1 \leq x \leq 6$, *escreve a soma de Riemann com* $n = 5$, *tomando como pontos amostrais os pontos médios.*

Exercício

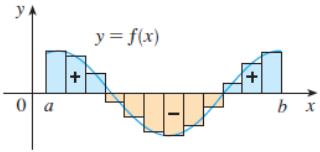
Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado:

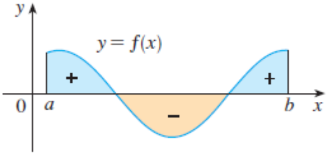
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{1 + x_i} \Delta x, [1, 5]$$

Exercício

Calcule $\int_1^2 x^3 dx$

Interpretação da integral: área líquida (=diferença das áreas)



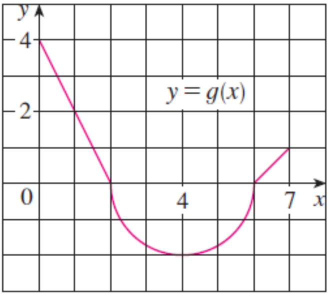


Exemplos

Exercício

O gráfico de g consiste em duas retas e um semicircuo. Use-o para calcular cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\,dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\,dx$



Propriedades da integral de Riemann

Teorema

1. *Se* $f(x) \geq 0$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. *Se* $f(x) \geq g(x)$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3. *Se* $m \leq f(x) \leq M$ *para* $a \leq x \leq b$ *então*
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)$

Como utilizar as propriedades da integral, sem calcular a integral

Exercício

Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade sem calcular as integrais:

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\, dx \geqslant 0$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx$$

$$2 \leqslant \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\, dx \leqslant \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$$

Mais propriedades da integral

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

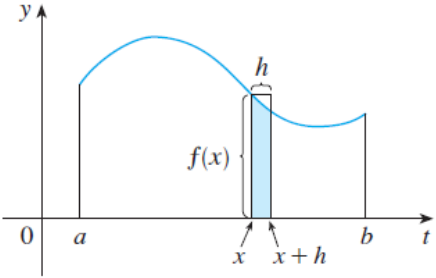
1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a),$ onde c é constante

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$ onde c é constante

4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Teorema fundamental do cálculo



Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 1)

Se f for contínua em $[a, b]$ então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é continua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental do cálculo

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Agora o ultimo termo é quase como $h.f(x)$ então $F'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental do cálculo, parte 2

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 2)

Se f for contínua em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Prova: com $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, sabemos que $g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)dt$. Mas também sabemos que duas antiderivadas de f diferem por uma constante

$$F(x) = g(x) + C$$

então $F(b) - F(a) = (g(b) + C) - (g(a) + C) = \int_a^b f(t)dt$.

Praticar: calcule as derivadas

7. $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\, dt$

8. $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t}\, dt$

9. $g(s) = \int_5^s (t - t^2)^8\, dt$

10. $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\, dx$

11. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\, dt$

Praticar: calcule as derivadas

12. $G(x) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}\, dt$

13. $h(x) = \int_1^{e^x} \ln t\, dt$

14. $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4 + 1}\, dz$

15. $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\, dt$

16. $y = \int_0^{x^4} \cos^2\theta\, d\theta$

17. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1 + u^2}\, du$

18. $y = \int_{\sin x}^{1} \sqrt{1 + t^2}\, dt$

56. $g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t \sin t\, dt$

57. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\, dt$

58. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \arctan t\, dt$

59. $y = \int_{\cos x}^{\sin x} \ln(1 + 2v)\, dv$

Revisão: derivadas

Regras das derivadas

Formulas gerais

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

4. $\dfrac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (Produto)

6. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

7. $\dfrac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (Regra da cadeia)

8. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Exponencias

9. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

10. $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

11. $\dfrac{d}{dx} \ln|x| = \dfrac{1}{x}$

12. $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$