MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Reconhecer curvas polares, dada a equação

(a) $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$

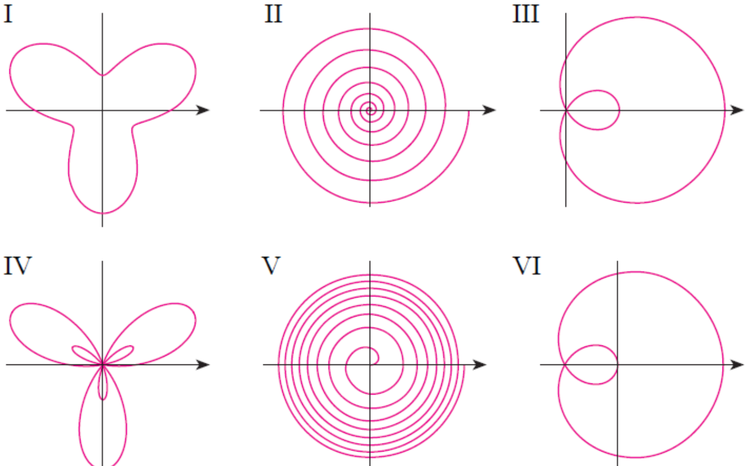
(b) $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$

(c) $r = \cos(\theta/3)$

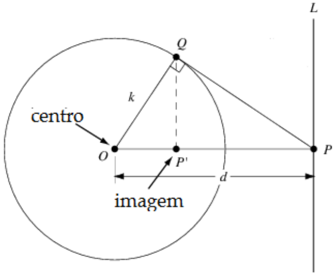
(d) $r = 1 + 2\cos\theta$

(e) $r = 2 + \sin 3\theta$

(f) $r = 1 + 2\sin 3\theta$



Exercício: a inversão



Definição

A inversão no circulo de raio 1 é uma aplicação f do plano tal que $f : P \mapsto P'$ satisfazendo: $OP.OP' = 1$ e P' é um ponto da semi-reta que $[OP)$.

Exercício

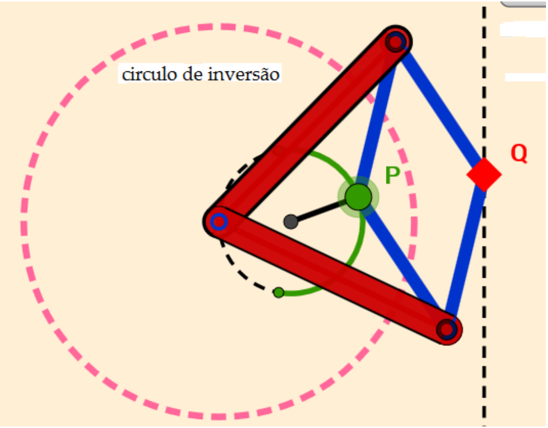
Escrever a formula da inversão com coordenadas polares. Mostre que a imagem de uma reta L (fora da origem) é um circulo passando pela origem.

Exercício: a inversão II

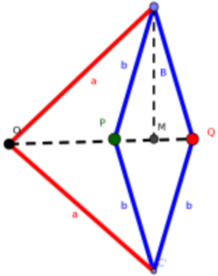
Formula mais geral:$OP.OP' = k^2$, onde k é o raio do circulo de inversão.

Exercício

Mostre que a seguinte maquina realiza uma inversão



Exercício: a inversão III



Vamos mostrar que essa maquina realiza uma inversão :

$$OP \cdot OQ = (OM - PM)(OM + PM) = OM^2 - PM^2 = OM^2 + DM^2 - DM^2 - PM^2 = a^2 - b^2$$

Comprimento de curva dada com uma equação polar

Teorema

O comprimento da curva $r = f(\theta)$ *onde* $a \leq \theta \leq b$ *é:*

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Essa formula é uma consequência da formula para curvas parametrizadas:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Exercício

Calcule o comprimento das curvas:

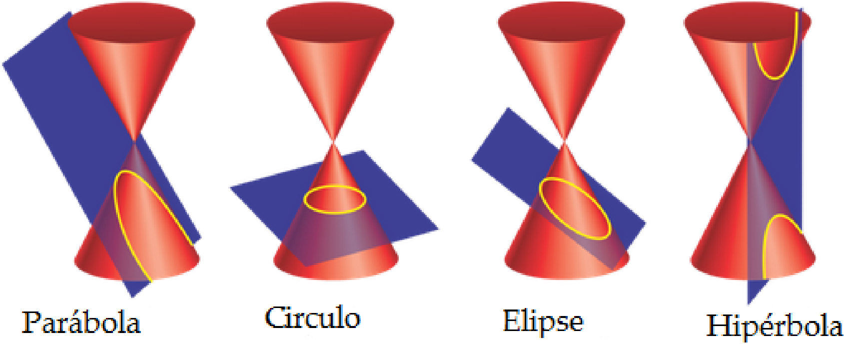
$$r = 2\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

$$r = 5^{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$r = \theta^{2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$r = 2(1 + \cos\theta)$$

Seções cônicas



Seções cônicas: parábola

Equação do cone: $z^2 = x^2 + y^2$ **Equação do plano escolhido:**

$$z = x + 1$$

Intersecção:$(x+1)^2 = x^2 + y^2 \implies y^2 = 2x + 1$ (parábola)

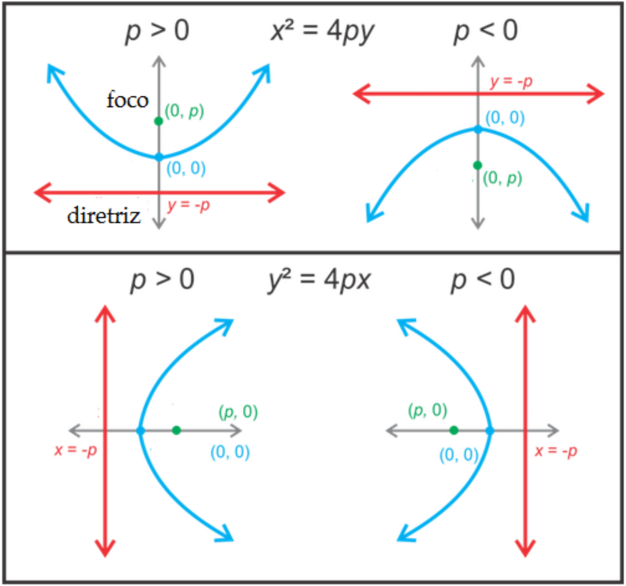
Teorema

O lugar dos pontos do plano P tais que a distancia de P até o ponto $F = (0, p)$ *(chamado o foco) é igual à distancia de P até a reta horizontal* $(y = -p)$ *é a parabola*

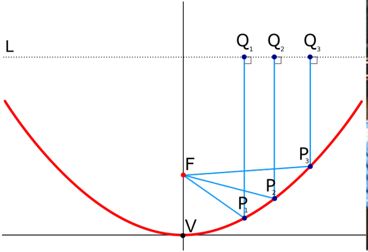
$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

Proof: A distancia PF é igual a $\sqrt{(x)^2 + (y-p)^2}$. A distancia de P até a reta $(y = -p)$ é $PH = |y + p|$. Então
$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \implies x^2 = 4py$

Seções cônicas: parábola



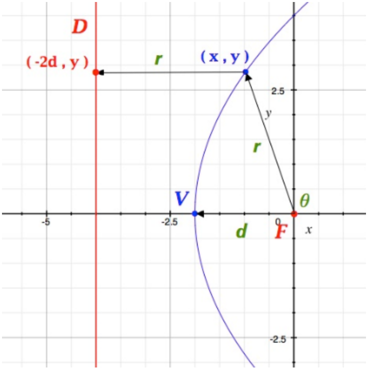
Mais propriedades da parábola



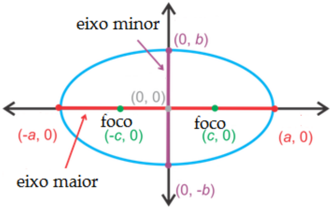
Aplicação: telescópio, feito de mercúrio em rotação constante. Para uma pequena parte de mercúrio, a energia cinética é $E_c := \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega r^2$ (rotação circular, a velocidade constante). A energia potencial $E_p := mgh$ (onde h é a altura da pequena parte). No equilíbrio,

$$E_c = E_p \implies h = \frac{1}{2g}\omega^2 r^2$$

Equação polar da parábola



Prova: temos $r = r\cos\theta + 2d \implies r(1-\cos\theta) = 2d \implies r = \frac{2d}{1-\cos\theta}$



Elipse como secção cônica : vamos cortar o cone $z^2 = x^2 + y^2$ com o plano $z = cx + 1$ (com $a < 1$)

$$x^2 + y^2 = z^2 = (cx+1)^2 \implies (1-c^2)x^2 - 2cx + y^2 = 1$$

Depois de um completamento de quadrado:

$$(x - \frac{c}{1-c^2})^2 + \frac{1}{1-c^2}y^2 = D,$$

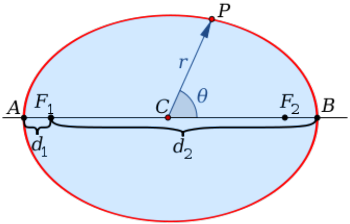
onde $D = \frac{1}{1-c^2} - \frac{c^2}{(1-c^2)^2}$, mas isso é uma equação do tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Teorema

Seja $f = \sqrt{a^2 - b^2}$.O lugar dos pontos P tais que $PF_1 + PF_2 = 2a$ é a elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, onde $F_i = (0, \pm f)$.

Equação paramétrica: $t \mapsto \binom{a\cos t}{b\mathrm{sen} t}$. **Equação polar:**com origem no centro:



Podemos fazer $x = r(\theta)\cos\theta$ e $y = r(\theta)\mathrm{sen}\theta$ e obter $r(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{(b\cos\theta)^2 + (a\mathrm{sen}\theta)^2}}$

Equação polar:com origem das coordenadas polares num foco:

Equação polar da elipse, com origem num foco:

Vamos colocar a origem no foco $(-c, 0)$ onde $c^2 = a^2 - b^2$. Temos a equação:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies b^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \implies b^2(x-c)^2 + a^2(r^2 - x$$

porque $y^2 = r^2 - x^2$. Depois,

$$a^2r^2 = a^2x^2 + a^2b^2 - b^2(x-c)^2,$$

Isso implica:

$$a^2r^2 = c^2x^2 + 2b^2cx - b^2c^2 + a^2b^2 = c^2x^2 + 2b^2cx + b^4,$$

Então:

$$ar = cx + b^2 \implies ar = cr\cos\theta + b^2 \implies r = \frac{b^2}{a - \cos\theta}.$$

Hipérbole

Equação geral: no plano (x, y)

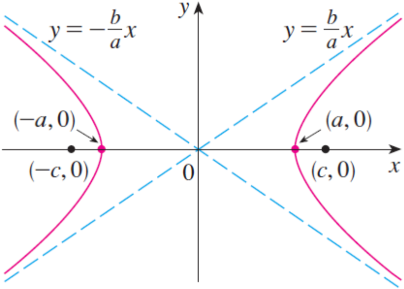
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

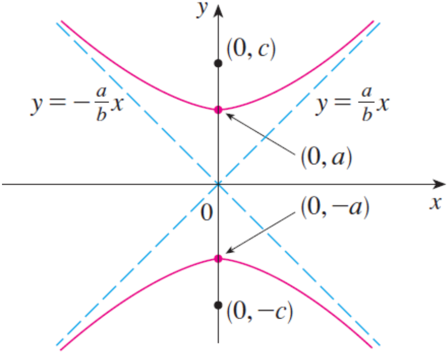
Hipérbole como secção cônica: podemos cortar o cone $z^2 = x^2 + y^2$ com o plano $x = 1$ e obter $z^2 - y^2 = 1$ que é a equação de uma hipérbole.
Depois de uma mudança de variáveis $u = z - y$ e $v = z + y$ temos uma outra forma da equação: $u.v = 1$.

Teorema

O lugar dos pontos P do plano tais que $PF_1 - PF_2 = 2|a|$ é a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ com $c^2 = a^2 + b^2$.

Gráficos: a primeira é $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e a segunda é $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$





Obs.: cada hipérbole tem assintotas.

Parametrização da hipérbole

Forma paramétrica: $t \mapsto \binom{a\cosh t}{b\mathrm{senh} t}$, onde senh$(t)$ é o seno hiperbólico $\frac{e^t - e^{-t}}{2}$ e o co-seno hiperbólico $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$. As duas funções satisfazem:

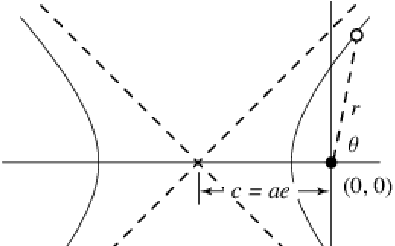
$$\cosh^2 x - \mathrm{senh}^2 x = 1$$

Observe que $\cosh x = \cos(ix)$ e $\mathrm{senh} x = -i\mathrm{sen}(ix)$.

Forma polar, com a origem num foco de coordenadas $(c, 0)$:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 - e\cos\theta},$$

onde $e = c/a$.



Forma polar geral de uma secção cônica

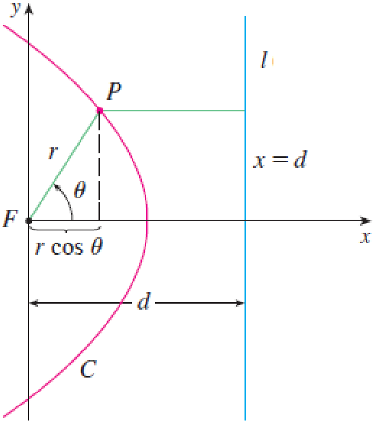
Teorema

Seja F um ponto fixado no plano ("foco") e l uma reta fixada ("diretriz") e $e > 0$ ("excentricidade"). O lugar dos pontos P do plano tais que

$$\frac{d(P,F)}{d(P,l)} = e, \text{ onde } d \text{ é a distancia,}$$

é uma seção cônica:

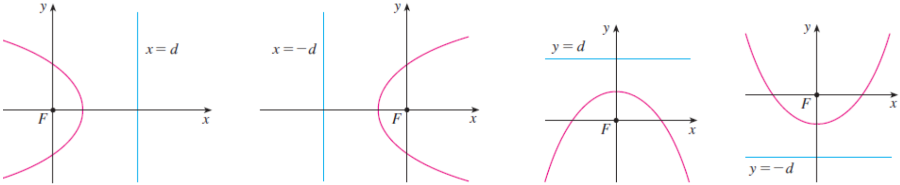
1. *caso $e < 1$: uma elipse,*
2. *caso $e = 1$: uma parábola,*
3. *caso $e > 1$: uma hipérbole.*



Com o gráfico podemos ver que

$$\frac{d(P,F)}{d(P,l)} = e \implies r = e(d - r\cos\theta) \implies r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}.$$

Forma polar geral III



(a) $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$ (c) $r = \dfrac{ed}{1 + e\sin\theta}$ (d) $r = \dfrac{ed}{1 - e\sin\theta}$

Teorema

A forma polar geral de uma seção cônica de excentricidade e é:

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \; ou \; r = \frac{ed}{1 \pm e\mathrm{sen}\theta}$$

Movimento de um planeta

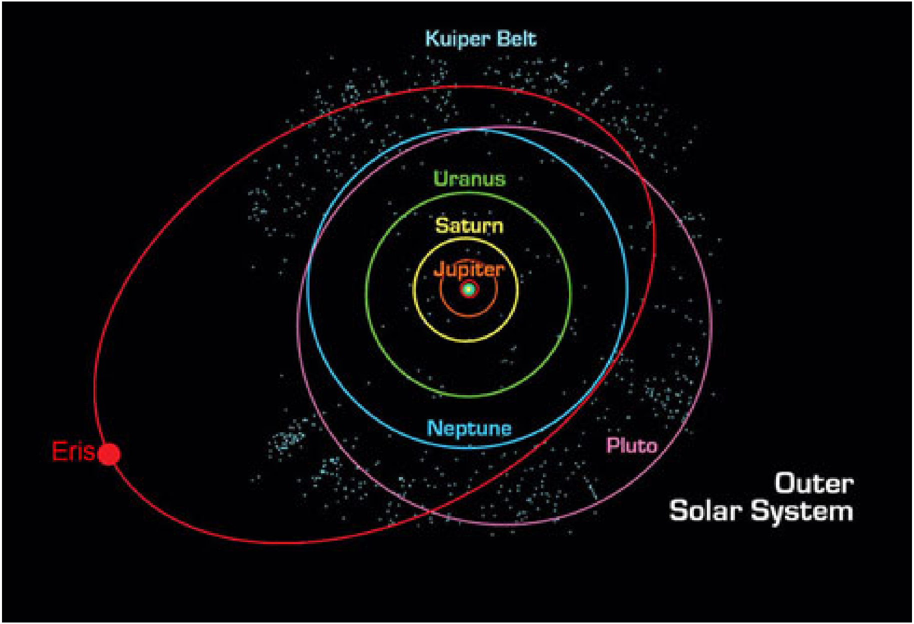
No potencial gravitacional $V = -\frac{GM}{r}$. Vamos supor que o movimento fica num plano, e vamos escolher unidades tais que $V = -1/r$.
Podemos introduzir $u = 1/r$.
Na proxima aula:

Teorema

O movimento de uma partícula na influencia de uma força gravitacional é uma cônica de excentricidade

$$e = \left(1 + \frac{2Eh^2}{m}\right)^{1/2},$$

onde h é o momento angular.


Kuiper Belt
Uranus
Saturn
Jupiter
Neptune
Pluto
Eris
Outer
Solar System

Movimento de um planeta