MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo: Curvas e equações paramétricas

1. **Exemplo simples:**
$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \mathrm{sen} t \end{pmatrix}$$
2. **Curva:** em geral, a imagem de uma aplicação $t \mapsto \binom{x(t)}{y(t)}$, onde $t \in [a, b]$.
3. **Curva parametrizada:** é a aplicação mesma $t \mapsto \binom{x(t)}{y(t)}$
4. **Exemplo de uma curva percorrida 10 vezes:** $t \mapsto \binom{\cos 10t}{\mathrm{sen} 10t}$
5. **Curva de classe C^1:** em geral, a curva é ”boa”, isto é $x(t)$ e $y(t)$ tem derivadas e as derivadas são contínuas.

Alguns exemplos: Retas e elipses

Exercício

Escreve a equação de um circulo de diâmetro $[0, a]$ *no plano.*

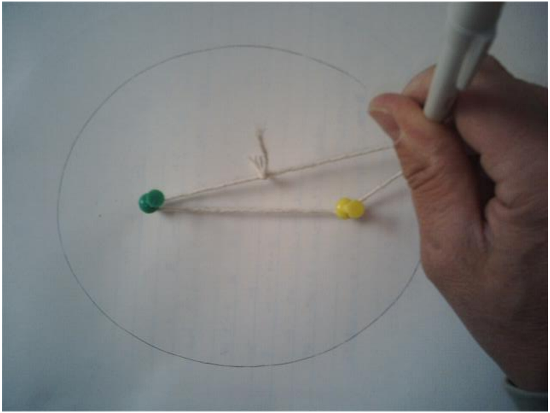
Exercício

Escreve a imagem pela aplicação complexa $z \mapsto z^2$ *de um circulo passando pela origem*

Exemplo da elipse

Exercício

Seja $f = \sqrt{a^2 - b^2}$. *Mostrar que* $PF_1 + PF_2$ *é constante onde* $F_i = (0, \pm f)$.



Comparar as curvas

Curva e parametrização: podemos ter duas parametrizações da mesma curva.

(a) $x = t^3, \quad y = t^2$ (b) $x = t^6, \quad y = t^4$
(c) $x = e^{-3t}, \quad y = e^{-2t}$

(a) $x = t, \quad y = t^{-2}$ (b) $x = \cos t, \quad y = \sec^2 t$
(c) $x = e^t, \quad y = e^{-2t}$

Definição

Vetor tangente:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Exercício

Encontre os pontos onde a tangente é horizontal ou vertical:

$$x = 10 - t^2, \quad y = t^3 - 12t$$

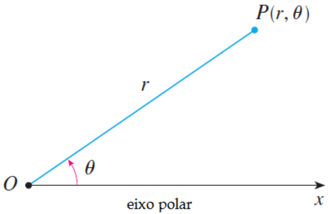
$$x = 2t^3 + 3t^2 - 12t, \quad y = 2t^3 + 3t^2 + 1$$

$$x = 2\cos\theta, \quad y = \sin 2\theta$$

$$x = \cos 3\theta, \quad y = 2\sin\theta$$

Relação com coordenadas (x, y)

$$x = r\cos\theta \text{ e } y = r\text{sen}\theta$$



Observação: também temos

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ e a inclinação } \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Curvas polares $r = f(\theta)$

Exemplo: circulo de diametro $[0,2]$ a curva é

$$r = 2\cos\theta$$

(desenhar alguns pontos).

Exercício

Desenhe o lugar geométrico de equação $r = \theta$ *(para* $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exercício

Mostre que $r = \text{sen}\theta$ *é a equação de um circulo. (Ideia: mostrar que* $r^2 = r\text{sen}\theta$*)*

Exercício

Desenhe o lugar geométrico de equação $r = 1 - \cos\theta$ *(em coordenadas polares)*

Curvas polares e área

Exercício

Desenhe a curva de equação $r = \cos 2\theta$*. Para isso, escrever uma tabelo com os valores* $\theta = 0, \pi/8, \pi/4, -\pi/8, -\pi/4, \pi/2$

Area de uma região limitada pela curva $r = f(\theta)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\theta$$

Para mostrar isso: podemos escrever a área de um setor circular de raio r e abertura $d\theta$, utilizando uma regra de três:

$$\text{Abertura } 2\pi \implies \text{Área } = \pi r^2$$

$$\text{Abertura } d\theta \implies \text{Área } = ??$$

Escrever uma curva com coordenadas polares, calcular áreas

Exercício

Passe a curva dada para coordenadas polares:

1. $x^4 - y^4 = 2xy$
2. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exercício

Calcule a área da região limitada pela curva dada:

1. $r^2 = \cos\theta$
2. $r = \cos 3\theta$

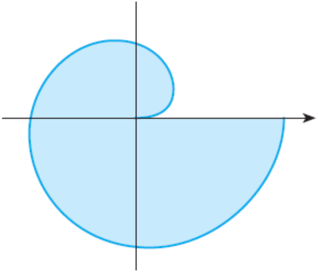
Exercício

Calcule a área do conjunto definido por $\theta^2 \leq r \leq \theta$.

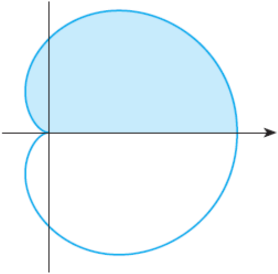
Aplicação: ferramenta para calcular uma área

Exercício

Calcule as áreas:



$r = \sqrt{\theta}$



$r = 1 + \cos\theta$

Exercício

Calcule as áreas entre as duas curvas:

$$r = \sqrt{3}\cos\theta, \quad r = \sin\theta$$

$$r = 1 + \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$$

$$r = \sin 2\theta, \quad r = \cos 2\theta$$

$$r = 3 + 2\cos\theta, \quad r = 3 + 2\sin\theta$$

$$r^2 = \sin 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$$

$$r = a\sin\theta, \quad r = b\cos\theta, \quad a > 0, \; b > 0$$

Exercício: a inversão

Definição

A inversão no circulo de raio 1 é uma aplicação f do plano tal que $f : P \mapsto P'$ satisfazendo: $OP.OP' = 1$ e P' é um ponto da semi-reta que $[OP)$.

Exercício

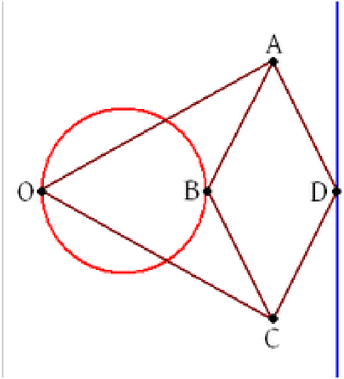
Escrever a formula da inversão com coordenadas polares. Mostre que a imagem de uma reta L (fora da origem) é um circulo passando pela origem. Mostre que a imagem de um circulo passando pela origem é uma reta que não passa pela origem. Estudar a imagem de uma reta passando pela origem.

Exercício: a inversão II

Formula mais geral: $OP.OP' = k^2$, onde $k = constante$.

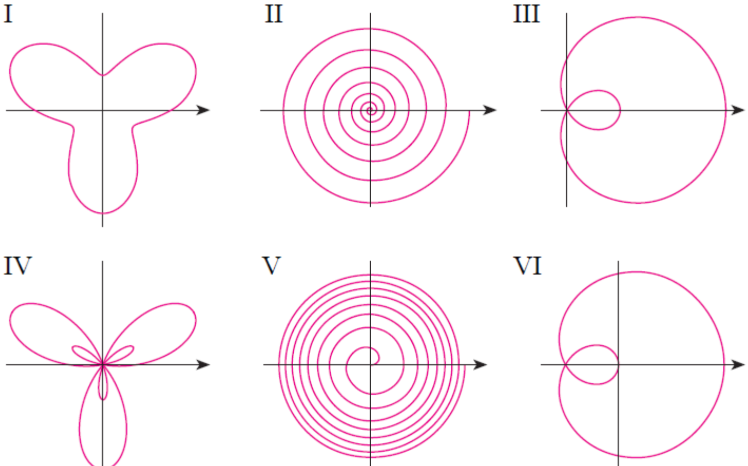
Exercício

Mostre que a seguinte maquina realiza uma inversão



Reconhecer curvas polares, dada a equação

(a) $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$
(b) $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$
(c) $r = \cos(\theta/3)$
(d) $r = 1 + 2\cos\theta$
(e) $r = 2 + \sin 3\theta$
(f) $r = 1 + 2\sin 3\theta$



Comprimento de curva dada com uma equação polar

Teorema

O comprimento da curva $r = f(\theta)$ onde $a \leq \theta \leq b$ é:

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Essa formula é uma consequência da formula para curvas parametrizadas:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Comprimento de curvas

Exercício

Calcule o comprimento das curvas:

$$r = 2\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

$$r = 5^{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$r = \theta^{2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$r = 2(1 + \cos\theta)$$